**Corso di Geometria II, a. a. 2018-19**

Foglio n. 3

*Consegnare le soluzioni all'inizio del terzo tutorato,*
*ore 14 di martedì 9 aprile in aula IV, o al più tardi giovedì 11 aprile a lezione alle ore 9.*

*Le soluzioni, elaborate in gruppi di quattro studenti,*
*devono riportare i nomi di tutti gli studenti del gruppo,*
*con astericato il nome di chi ha materialmente redatto le soluzioni*

**1.** Si consideri in $\mathbf{R}^2$ il quadrato $X = (0,1) \times [0,1]$.

i) Indicare in $X$ un ricoprimento aperto privo di sottoricoprimenti finiti.

ii) Indicare in $X$ una successione priva di sottosuccessioni convergenti.

**2.** Si considerino in $\mathbf{R}^3$ i luoghi $S_1, S_2, S_3$ dei punti rappresentati dalle seguenti equazioni:

i) $S_1 : f_1(x,y,z) = x^4 - y + z - 1 = 0$,

ii) $S_2 : f_2(x,y,z) = x^2 - y^3 + z^4 - 1 = 0$,

iii) $S_3 : f_1(x,y,z) = (x^2 + y^2 - 4)^2 + (z-4)^2 - 1 = 0$.

Stabilire quali tra $S_1, S_2, S_3$ sono compatti.

**3.** Si considerino in $\mathbf{R}^2$ i sottoinsiemi

$$X_k = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ kx + ky - 1 = 0\},$$

essendo $k \in \mathbf{N}$, e l'insieme

$$X = \bigcup_{k \in \mathbf{N}} X_k.$$

i) Stabilire se i sottoinsiemi $X_k$ sono chiusi in $\mathbf{R}^2$ e se sono compatti.

ii) Stabilire se $X$ è chiuso e in caso negativo determinarne la chiusura $\overline{X}$.

iii) Stabilire se $X$ (o $\overline{X}$) è compatto.

**4.** Si considerino i $\mathbf{R}^2$ le circonferenze:

$$C_n : \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{n^2},$$

il punto $p_n = (\frac{2}{n}, 0) \in C_n$ e la retta $r_n$ tangente a $C_n$ in $p_n$.

i) Stabilire se gli insiemi

$$C = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} C_n, \qquad r = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} r_n$$

sono chiusi in $\mathbf{R}^2$. In caso negativo determinarne le chiusure $\overline{C}$ e $\overline{r}$.

ii) Posto $X = C \cap r$, determinare la chiusura $\overline{X}$ di $X$. Stabilire se le topologie euclidee indotte su $X$ e su $\overline{X}$ coincidono con le rispettive topologie discrete.

iii) Quali tra gli insiemi $C, r, X, \overline{X}$ sono compatti?

**5.** Sia $\mathcal{C}$ la curva dello spazio euclideo $\mathbf{R}^3$, di equazioni parametriche

$$\sigma(t) : (x = t\,sin\,t,\ y = t\,cos\,t,\ z = t^3), \quad t \in \mathbf{R}.$$

i) Verificare che $\mathcal{C}$ è regolare, ovvero che $\sigma'(t) \ne 0$ per ogni $t \in \mathbf{R}$.

ii) Verificare che $\mathcal{C}$ non ha flessi, ovvero che la sua curvatura è strettamente positiva.

iii) Determinare nel punto $O = \sigma(0) \in \mathcal{C}$ i tre versori di Frenet, la curvatura e la torsione. Scrivere nello stesso punto le equazioni della retta tangente.

iv) Sia $\mathcal{D}$ la curva ottenuta proiettando ortogonalmente $\mathcal{C}$ sul piano $z = 0$. Scrivere una parametrizzazione di $\mathcal{D}$ e determinare il punto di $\mathcal{D}$ a curvatura massima.