Corso di Geometria II, a. a. 2018-19

Foglio n. 4

Consegnare le soluzioni all'inizio del terzo tutorato, ore 14 di martedì 14 maggio in aula IV.
Le soluzioni, elaborate in gruppi di quattro studenti, devono riportare i nomi di tutti gli studenti del gruppo, con astericato il nome di chi ha materialmente redatto le soluzioni.

1. Si consideri in $\mathbf{R^3}$ l'iperboloide iperbolico $\mathcal{H}$ (in figura) di equazione cartesiana

$$\mathcal{H}: \quad x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

i) Verificare che le intersezioni di $\mathcal{H}$ con i piani contenenti l'asse z sono iperboli, e calcolare la curvatura di tali iperboli nei loro due punti con $z = 0$.

ii) Osservare che l'intersezione di $\mathcal{H}$ con il piano xy è la circonferenza $\mathcal{C}$ di equazioni parametriche $x = \cos u,\ y = \sin u,\ z = 0$.

iii) Si consideri per ogni punto $P_u = (\cos u,\ \sin u,\ 0) \in \mathcal{C}$, una retta r_u di $\mathbf{R^3}$, dunque di equazioni parametriche

$$r_u : \quad x = \cos u + vl(u),\ y = \sin u + vm(u),\ z = vn(u),$$

essendo $(l(u), m(u), n(u))$ i parametri direttori di r_u, ed essendo v il parametro lineare che descrive i punti della retta r_u passante per P_u.

iv) Determinare le funzioni $l(u), m(u), n(u)$ in modo che le rette r_u appartengano a $\mathcal{H}$. Si constati che esistono due scelte per tali terne di funzioni, coerentemente con la figura che evidenzia l'esistenza di due rette $r_u \subset \mathcal{H}$ passanti per ogni $P_u \in \mathcal{C}$ (le due schiere di rette sull'iperboloide iperbolico).

v) Effettuata una delle due scelte possibili per la terna $(l(u), m(u), n(u))$ ottenuta al punto iv), la si utilizzi per scrivere le equazioni parametriche di $\mathcal{H}$ come superficie rigata:

$$\mathcal{H}: \quad x = \cos u + vl(u),\ y = \sin u + vm(u),\ z = vn(u), \qquad u \in [0, 2\pi], v \in \mathbf{R}.$$

2. Le equazioni parametriche di $\mathcal{H}$ scritte in risposta al punto v) dell'esercizio 1 guardano ad $\mathcal{H}$ come superficie rigata. Vi sono certamente altre possibilità di scrivere equazioni parametriche di $\mathcal{H}: \quad x^2+y^2-z^2 = 1$.

i) Scrivere le equazioni parametriche $x = x(t), z = z(t)$ dell'iperbole $\mathcal{D}$ sezione di $\mathcal{H}$ del piano xz.

ii) Scrivere di conseguenza equazioni parametriche di $\mathcal{H}$, pensandola come superficie ottenuta per rotazione attorno all'asse z dell'iperbole $\mathcal{D}$.

iii) Un'altra possibilità è scrivere $\mathcal{H}$ come unione dei due grafici di funzione $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2 - 1}$. Vi sono problemi di regolarità C^∞ con questa rappresentazione?

3. Si ripercorrano i quesiti degli esercizi 1 e 2 per l'iperboloide ellittico $\mathcal{E}$ di $\mathbf{R^3}$ di equazione cartesiana

$$\mathcal{E}: \quad x^2 - y^2 - z^2 = 1.$$

Anche $\mathcal{E}$ è una superficie rigata? E di rotazione? Come si possono scrivere le equazioni parametriche di $\mathcal{E}$?

4. Si considerino in $\mathbf{R^2}$ i due sottoinsiemi

$$S_1 = \text{ retta di equazione } \; y = 1, \qquad S_2 = \text{ retta di equazione } \; y = -1,$$

e si introduca nel sottospazio $S = S_1 \cup S_2$ la seguente equivalenza $\sim$

$$(x, 1) \sim (x', -1) \Longleftrightarrow x = x' \neq 0.$$

a) Descrivere gli aperti saturi di S relativamente alla proiezione nello spazio quoziente $Z = S/_{\sim}$.

b) Z è di Hausdorff?

c) Mostrare che in Z esistono due sottospazi compatti K_1 e K_2 tale che $K_1 \cap K_2$ non è compatto.

5. Nello spazio topologico $X = \{(x, y) \in \mathbf{R^2} \, : \, xy > 0\}$, dotato di topologia euclidea, si consideri la seguente relazione di equivalenza $(x, y) \, \rho \, (x', y')$ se e solo se

$$det \begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} = 0.$$

i) Descrivere gli aperti saturi di X e determinare la saturazione dell'aperto $U = \{(x, y) \in X \, : \, x > 1, \; y > 1\}$.

ii) Verificare che lo spazio topologico quoziente $X/_{\rho}$ non è compatto.

iii) Verificare che $X/_{\rho}$ è connesso per archi.