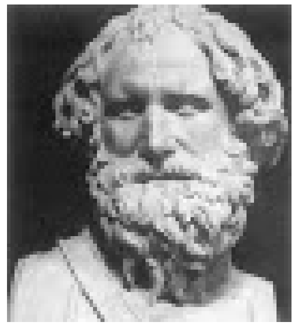
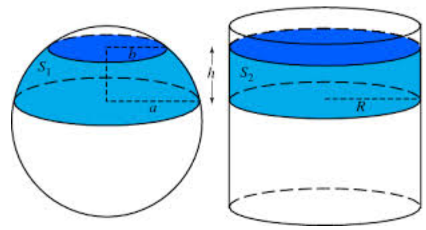
Corso di Geometria II, a. a. 2018-19

Foglio n. 5

Consegnare le soluzioni all'inizio del tutorato, ore 14 di martedì 28 maggio in aula IV.
Le soluzioni, elaborate in gruppi di quattro studenti, devono riportare i nomi di tutti gli studenti del gruppo, con astericato il nome di chi ha materialmente redatto le soluzioni.





1 (La tomba di Archimede) Secondo la tradizione, la tomba di Archimede (287-212 a.C.) aveva la forma di una sfera S^2 iscritta in un cilindro C. Nella sua opera *Della sfera e del cilindro*, Archimede dimostrò che l'applicazione $f : S^2 \to C$ che al punto $p \in S^2$ associa il punto $f(p) \in C$, ottenuto intersecando C con la semiretta orizzontale passante per p e uscente dall'asse del cilindro, conserva le aree. In particolare la superficie totale della sfera $4\pi r^2$ è uguale alla superficie laterale del cilindro, ottenuta come prodotto della circonferenza di base $2\pi r$ per l'altezza $2r$.

Ricordiamo che sfera e cilindro non sono localmente isometriche. Ciò è conseguenza del teorema egregium: la curvatura gaussiana è $K = \frac{1}{r^2}$ sulla sfera e $K = 0$ sul cilindro. Tuttavia tra esse esiste un'applicazione che conserva le aree. Ciò si esprime dicendo che sfera e cilindro sono localmente equivalenti *come varietà simplettiche*, ovvero l'applicazione f sopra descritta, pur non conservando i coefficienti E, F, G della prima forma fondamentale, conserva la 2-forma d'area dA che si scrive in termini di E, F, G.

Di fatto nel XX secolo, ovvero circa 22 secoli dalla sua formulazione, il teorema di Archimede appare come prototipo di fondamentali nozioni di geometria simplettica.

Ora l'esercizio.

i) Siano S^2_r la sfera di raggio r e il cilindro C_r ad essa circoscritto, di equazioni parametriche rispettivamente

$$S^2_r : \begin{cases} x(\theta,\varphi) = r\sin\theta\cos\varphi \\ y(\theta,\varphi) = r\sin\theta\sin\varphi \\ z(\theta,\varphi) = r\cos\theta \end{cases}, \qquad C_r : \begin{cases} x(u,v) = r\cos u \\ y(u,v) = r\sin u \\ z(u,v) = v \end{cases}$$

essendo $0 \le \varphi \le \pi$ e $0 \le \theta \le 2\pi$, nonché $-r \le v \le r$ e $0 \le u \le 2\pi$. Calcolare i coefficienti $E(\theta,\varphi), F(\theta,\varphi), G(\theta,\varphi)$, $E(u,v), F(u,v), G(u,v)$ delle prime forme fondamentali di S^2_r e di C_r.

ii) Scrivere le 2-forme d'area

$$dA_{S^2_r} = \sqrt{EG - F^2}\, d\theta \wedge d\varphi, \qquad dA_{C_r} = \sqrt{EG - F^2}\, du \wedge dv$$

per le due superfici.

iii) Esprimere l'applicazione differenziabile $f : S^2_r \to C_r$ sopra descritta mediante una coppia di funzioni C^∞

$$u = f_1(\theta,\varphi), \; v = f_2(\theta,\varphi).$$

iv) Usando la precedente coppia f_1, f_2 di funzioni, scrivere la 2-forma indotta $f^* dA_{C_r}$, e constatare che essa coincide (a meno del segno) con $dA_{S^2_r}$.

v) Dedurne che l'area della regione R su S^2_r definita da $\varphi_0 \le \varphi \le \varphi_1$ e $\theta_0 \le \theta \le \theta_1$ coincide con l'area della regione $f(R)$ su C_r.

2. Si consideri in $\mathbb{R}^3$, con coordinate cartesiane (x, y, z) la superficie S rappresentata dal grafico della funzione $z = x^3 + y^3$.

(i) Assumendo $x = u,\ y = v$ si determinino il versore normale $\vec{N}$ di S, i coefficienti E, F, G, l, m, n delle due forme fondamentali e le funzioni $H(u, v)$ e $K(u, v)$ di curvatura media e di curvatura gaussiana di S.

(ii) Stabilire in quali punti del piano uv risulta $K = 0$, in quali $K > 0$ e in quali $K < 0$.

(iii) Vi sono punti del piano uv in cui $H = K = 0$?

(iv) L'applicazione di Gauss $S \to S^2$ di S è suriettiva?

3. Siano $\varphi, \psi : X \to Y \subset \mathbb{R}^n$ applicazioni continue definite su uno spazio topologico X, e a valori in un sottospazio Y dell' $\mathbb{R}^n$ euclideo.

i) Si assuma che per ogni $x \in X$ il segmento da $\varphi(x)$ a $\psi(x)$ sia contenuto in Y. Costruire un'omotopia $F : X \times I \to Y$ da φ a ψ.

ii) Dedurne che due applicazioni continue $\varphi, \psi : X \to \mathbb{R}^n$ sono necessariamente omotope.

4. (Da fare dopo aver svolto l'esercizio 3). Siano ora $\varphi, \psi : X \to S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ due applicazioni continue tali che $\varphi(x) \neq -\psi(x)$ per ogni $x \in X$.
i) Costruire un'omotopia $F : X \times I \to S^{n-1}$ da φ a ψ.

ii) Dedurne che ogni $\varphi : X \to S^{n-1}$ continua e non suriettiva è omotopa a un'applicazione costante.

5. Si consideri il toro

$$T^2 = S^1 \times S^1 = \{(e^{2\pi it}, e^{2\pi is});\ t, s \in [0, 1]\},$$

dove si ricordi che $e^{2\pi it} = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \in S^1 \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$.

i) Verificare che l'applicazione $p : (t, s) \to (4t, 6s)$ definisce un rivestimento

$$p : T^2 \to T^2.$$

ii) Determinare la cardinalità delle fibre $p^{-1}(y_0)$.

iii) Descrivere l'applicazione p_* indotta tra i gruppi fondamentali, precisando l'indice del sottogruppo

$$p_*[\pi_1(T^2, x_0)] \subset \pi_1(T^2, p(x_0)).$$

iv) Si consideri la spirale $\mathcal{S}$, sul toro che riveste, definita dalla relazione $s = 2t$. Quante volte la proiezione $p(\mathcal{S})$ interseca un parallelo del toro rivestito? E un meridiano?