Corso di Geometria II, a. a. 2015-16

Foglio n. 2

1. Si consideri il sottospazio $S = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) \in \mathbf{R}^2; n, m \in \mathbf{N}\}$ dell' $\mathbf{R}^2$ euclideo.

i) Determinare la parte interna S^o, la parte esterna Est S, la frontiera ∂S, la chiusura $\overline{S}$.

ii) Confrontare le topologie indotte su S e su $\overline{S}$ con la topologia discreta;

2. Si considerino su $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ le seguenti topologie prodotto: $\tau_1 = \mathcal{E} \times \mathcal{Z}$, $\tau_2 = \mathcal{Z} \times \mathcal{Z}$, $\tau_3 = \tau_{\text{ban}} \times \tau_{\text{discr}}$, essendo $\mathcal{E}, \mathcal{Z}, \tau_{\text{ban}}, \tau_{\text{discr}}$ le topologie rispettivamente euclidea, cofinita, banale e discreta su $\mathbf{R}$.

i) Stabire quali relazioni d'ordine "di maggiore finezza" sussistono tra τ_1, τ_2, τ_3.

ii) Per ognuna delle topologie τ_1, τ_2, τ_3 stabilire quali tra i seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$ sono aperti:

a) il quadrato $I^2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$,

b) il disco $B^2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2,\ x^2 + y^2 < 1\}$,

c) $\mathbf{R}^2 - (0, 0)$.

iii) Si considerino infine le coppie $(\tau_i, \tau_j)(i, j = 1, 2, 3)$, di topologie che, secondo la risposta data al quesito i) sono non confrontabili. Costruire esempi di sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$ che siano aperti in τ_i ma non in τ_j e viceversa.

3. Si considerino i seguenti sottospazi dell' $\mathbf{R^2}$ euclideo:

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 4\}; \qquad B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{1}{4} < x^2 + y^2 < 4\};$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{1}{4} < x^2 + y^2 \leq 4\}; \qquad D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 < 4\};$$

$$E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{1}{2} \leq |x| \leq 2,\ \frac{1}{2} \leq |y| \leq 2\};$$

$$F = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \frac{1}{4} \leq |x| \leq 4,\ \frac{1}{2} \leq |y| \leq 2\}; \quad G = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 > 0\}.$$

i) Tracciare un disegno approssimativo dei sottospazi A, B, C, D, E, F, G e stabilire quali tra essi sono aperti in $\mathbf{R}^2$, quali sono chiusi, quali aperti e chiusi, quali ne' aperti ne' chiusi.

ii) Determinare quali tra i sottospazi A, B, C, D, E, F, G sono tra loro omeomorfi, costruendo esplicitamente un omeomorfismo.

iii) Determinare quali tra i sottospazi A, B, C, D, E, F, G non sono tra loro omeomorfi, e precisare quali propriet topologiche permettono di escludere l'esistenza di un omeomorfismo .

4. Sia $f : X \to Y$ un'applicazione tra spazi topologici (in X e in Y sono fissate topologie risp. τ_1 e τ_2). Verificare che f è continua se e solo se per ogni sottoinsieme S di Y risulta soddisfatta la seguente inclusione $f^{-1}(S^o) \subseteq (f^{-1}S)^o$ tra le parti interne indicate.

5. Si consideri in $\mathbf{R^2}$ il sottospazio $S =$ curva di equazioni parametriche:

$$x = e^{-t}\ cos\ t, \quad y = e^{-t}\ sin\ t.$$

i) Stabilire se S è un chiuso in $\mathbf{R^2}$.

ii) Stabilire se S è omeomorfo a $\mathbf{R}$.

6. Si determinino in $\mathbf{R^2}$ gli eventuali limiti delle successioni di punti ($n \in \mathbf{N}$):

i) $\{a_n\} = \{(cos\ n, sin\ n)\}$,

ii) $\{b_n\} = \{(e^{-n} cos\ n, e^{-n} sin\ n)\}$,

e, nel caso il limite non esista, l'esistenza di una sottosuccessione convergente. [Si ricordi che $\pi = 3,14159265358979\ldots$.]