



Esercizio 1 (Un rivestimento non regolare dalla superficie S_4 di genere 4 alla superficie S_2 di genere 2). Ricordiamo che un rivestimento $p : \tilde{X} \rightarrow X$ si dice *regolare* se per ogni $\tilde{x} \in \tilde{X}$ sia ha che il sottogruppo $p_*[\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})]$ di $\pi_1(X, p(\tilde{x}))$ è normale. Con riferimento alla figura in alto a sinistra:

- i) Si osservi che il cappio \tilde{b} e il cammino \tilde{b}' sono entrambi sollevamenti del cappio b uscente da $x_0 \in S_2$, ma sollevato con punto iniziale rispettivamente $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in S_4$.
- ii) Esplicitare il ruolo del cappio γ nella definizione della relazione di coniugio tra i sottogruppi $p_*[\pi_1(S_4, \tilde{x}_0)]$ e $p_*[\pi_1(S_4, \tilde{x}_1)]$ di $\pi_1(S_2, x_0)$.
- iii) Dedurne che il rivestimento in alto a sinistra non è regolare e pertanto che il gruppo fondamentale astratto $\pi_1(S_2)$ non è abeliano.

Esercizio 2 (Il rivestimento universale della superficie S_2 di genere 2). Con riferimento alla figura in alto a destra:

- i) Identificare, nella figura del disco aperto rivestimento universale, il sollevamento dei quattro cappi evidenziati sulla figura solida in basso della superficie S_2 . Si assuma come punto iniziale del sollevamento un vertice dell'ottagono curvilineo con lati a, b, c, d .
- ii) Tenuto conto che il disco rivestimento universale è semplicemente connesso, tali quattro cappi si devono sollevare o a cappi omotopi al cappio costante o a cammini non chiusi. Quale delle due eventualità si verifica?