Spazi connessi e connessi per archi

P. Piccinni

Corso di Geometria II (A-L), a.a. 2019-20
Laurea Triennale in Matematica
Sapienza Università di Roma Classroom - codice 24bsdao

Lezione del 24 marzo 2020, durata 2 ore
Lezione del 26 marzo 2020, durata 2 ore

Indice

Connesso vs connesso per archi

Nelle presenti slides si tratterà delle seguenti due proprietà topologiche:

- Connessione
- Connessione per archi

La terminologia suggerisce una certa vicinanza tra le due proprietà.

In realtà le definizioni di connessione e connessione per archi sono completamente differenti. Di più, la definizione di spazio "connesso" è del tutto negativa; si definisce di fatto cos'è uno spazio sconnesso e solo per negazione cos'è uno spazio connesso. Coerentemente le dimostrazioni che riguardano la proprietà di connessione saranno tutte per assurdo.

Al contrario, la definizione di spazio connesso per archi non è affatto negativa. Alla fine delle slides, attraverso una sequenza di risultati, si stabiliranno varie implicazioni e vicinanza tra le due proprietà topologiche trattate. Vedremo tra l'altro che queste nozioni consentono un primo approccio, anche se solo in casi particolari, al problema dell'invarianza topologica della dimensione.

Spazio connesso

Definizione. Uno spazio topologico (X, τ) si dice *connesso* se non esistono suoi aperti A, B non vuoti tali che

$$A \cup B = X, \qquad A \cap B = \emptyset.$$

Le seguenti caratterizzazioni degli spazi connessi sono immediate:

Proposizione. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

i) (X, τ) è connesso;

ii) Non esistono in X due chiusi H, K non vuoti tali che

$$H \cup K = X, \qquad H \cap K = \emptyset;$$

iii) I soli sottoinsiemi di X contemporaneamente aperti e chiusi sono X e $\emptyset$.

Qualche spazio sconnesso

Definizione. Se spazio topologico X non è connesso, X si dice *sconnesso*, e la decomposizione $X = A \cup B$ nei suoi aperti non vuoti e disgiunti A e B si dice *sconnessione* di X (nei video del Prof. Zimmermann "separation").

Nel seguito diamo alcuni esempi di spazi sconnessi, con esplicita sconnessione.

- $X = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$, con la topologia euclidea indotta. Vale la sconnessione
$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-.$$
- Il gruppo lineare generale $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}),\ \det A \neq 0\}$, con la topologia euclidea indotta dall'identificazione $M_n(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^{n^2}$ (cfr. file "Sottospazi.pdf"). Si ha la sconnessione
$$GL(n, \mathbb{R}) = GL^+(n, \mathbb{R}) \cup GL^-(n, \mathbb{R})$$
nei due insiemi delle matrici a determinante risp. positivo e negativo, entrambi aperti come controimmagini mediante la funzione continua $\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ degli aperti di $\mathbb{R}$ risp. $\mathbb{R}^+$ e $\mathbb{R}^-$. Si noti che per $n = 1$ si riottiene il precedente esempio.
- Similmente il gruppo ortogonale $O(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}),\ A^t A = I\}$ si sconnette nei due suoi aperti
$$O(n, \mathbb{R}) = SO(n, \mathbb{R}) \cup O^-(n, \mathbb{R}),$$
costituiti dalle matrici ortogonali A risp. con $\det A = 1$ e con $\det A = -1$.

In ognuno di questi tre esempi la sconnessione è unica, trattandosi di esempi con due "componenti connesse" (si veda più avanti).

Altri spazi sconnessi

Vediamo ora altri esempi di spazi sconnessi, esplicitando una sconnessione che tuttavia non è evidentemente unica.

- $X = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, con la topologia euclidea indotta. Si ha p. es. la sconnessione

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^-,$$

  ma infinite altre sconnessioni sono possibili, dato che la topologia euclidea indotta su $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ è la topologia discreta. Si osservi al riguardo che ogni spazio topologico discreto (X, τ_{discr}) risulta sconnesso, se X ha più di un punto.

- $X = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, ancora con la topologia euclidea indotta. Si noti che qui la decomposizione insiemistica $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^-$ non è una sconnessione secondo la definizione. Infatti $\{0\}$ non è un aperto nello spazio $\mathbb{Q}$ euclideo: $\{0\}$ non risulta essere intersezione di alcun intervallo aperto $(-\epsilon, \epsilon)$ di $\mathbb{R}$ con $\mathbb{Q}$, a causa della densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. E' invece una sconnessione di $\mathbb{Q}$ la seguente decomposizione:

$$\mathbb{Q} = \Big(\mathbb{Q} \cap (-\infty, \sqrt{2})\Big) \cup \Big(\mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}, +\infty)\Big),$$

  e naturalmente infinite altre simili sconnessioni di $\mathbb{Q}$ sono possibili, scegliendo un arbitrario numero irrazionale al posto di $\sqrt{2}$.

Intervalli

Abbiamo già implicitamente usato la seguente

Definizione. Un sottoinsieme S di uno spazio topologico X si dice *connesso* se è connesso come sottospazio topologico.

Definizione. Un sottoinsieme S della retta euclidea $\mathbb{R}$ si dice un *intervallo* se

$$x, y \in S \qquad \text{e} \qquad x < z < y \qquad \Rightarrow \qquad z \in S.$$

Useremo il simbolo J per denotare gli intervalli di $\mathbb{R}$.

Sia J un intervallo di $\mathbb{R}$. Secondo che $\sup J$ e $\inf J$ appartengano o no a J e se siano o no finiti, abbiamo i seguenti nove tipi di intervalli:

$$(a, b), \quad [a, b), \quad (a, b], \quad [a, b],$$

$$(a, +\infty), \quad [a, +\infty), \quad (-\infty, b), \quad (-\infty, b], \quad (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

e un (successivo) problema sarà darne una completa classificazione topologica.

Caratterizzazione degli intervalli

Teorema. Sia S un sottoinsieme della retta euclidea $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$. S è connesso se e solo se è un intervallo.

Dimostrazione. Mostriamo prima l'implicazione S connesso $\Rightarrow$ S intervallo. Per assurdo, sia S un non intervallo. Dunque esistono numeri reali $x < z < y$ con $x, y \in S$ ma $z \notin S$. Allora

$$S = \Big(S \cap (-\infty, z)\Big) \cup \Big(S \cap (z, +\infty)\Big)$$

è una sconnessione di S.

Mostriamo ora che S intervallo $\Rightarrow$ S connesso. Ancora per assurdo. Sia $S = H \cup K$ una sconnessione, con H e K chiusi, disgiunti e non vuoti. Dunque esistono $x \in H$, $y \in K$, e per fissare le idee supponiamo $x < y$. Consideriamo

$$z = \sup\{H \cap [x, y]\},$$

e dunque $x \leq z \leq y$. Poiché S è un intervallo, è $z \in S$ e d'altra parte H chiuso $\Rightarrow$

$z \in H \cap [x, y] \subset H$. Ma allora $(z, y] \subset K \cap [x, y] \subset K$ e poiché anche K è chiuso, risulta $z \in K$.

Ciò contraddice $H \cap K = \emptyset$.

Intervalli generalizzati

Lo studente che legge queste slides dopo aver visto i video delle lezioni del Prof. Zimmermann si sarà accorto che la caratterizzazione degli intervalli su $\mathbb{R}$ come tutti e soli i sottoinsiemi connessi della retta euclidea vale, sostanzialmente senza alcuna modifica, per gli "intervalli" di un insieme totalmente ordinato dotato della "order topology".

Esempio 1. Menzioniamo in primo luogo (cfr. mio file "Prodotti.pdf", slide 9, e Foglio 1 di esercizi), l'esempio

$$(\mathbb{R}^2, \text{"order topology"}),$$

in cui si assume come base per la "order topology" i cosiddetti "intervalli aperti limitati" relativi al seguente *ordinamento lessicografico* di $\mathbb{R}^2$:

$$(x_1, y_1) < (x_2, y_2) \text{ se e solo se } x_1 < x_2 \text{ oppure } x_1 = x_2, y_1 < y_2.$$

Più precisamente, se $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ e lessicograficamente $a < b$ definiamo un "intervallo aperto limitato lessicografico" un sottoinsieme del tipo

$$(a, b) = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tali che lessicograficamente} \quad a < z < b\}.$$

Nelle lezione n. 2 del Prof. Zimmermann si è visto perché tale "order topology" di $\mathbb{R}^2$ coincida con il prodotto delle due topologie discreta τ_{discr} e euclidea $\mathcal{E}$ sulle due rette fattori del piano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Quadrato unitario ordinato

Esempio 2. In modo del tutto simile sul quadrato chiuso unitario

$$\mathbb{I}^2 = [0,1] \times [0,1]$$

abbiamo lo stesso ordinamento lessicografico considerato in $\mathbb{R}^2$, e dunque anche qui la base costituita dagli intervalli aperti limitati lessicografici definiscono lo spazio topologico

$$(\mathbb{I}^2, \text{"order topology"}).$$

Di questo esempio parleremo più ampiamente in seguito.

Come dicevamo, la caratterizzazione dei sottoinsiemi connessi di $\mathbb{R}$, che risultano essere tutti e soli gli intervalli (aperti o chiusi, limitati o illimitati, per entrambe le alternative a sinistra e/o a destra), si estende con la stessa dimostrazione ai sottoinsiemi di ogni insieme totalmente ordinato con la order topology. In particolare tutto l'insieme - corrispondente all'intervallo generalizzato "$(-\infty, +\infty)$" - risulta connesso. Dunque:

Corollario. Rispetto alla order topology, sia $\mathbb{R}^2$ che $\mathbb{I}^2$ sono spazi connessi.

(Vedremo più avanti che questi due spazi non sono connessi per archi).

Ancora sulla order topology

Teorema (del valor intermedio). Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua da uno spazio topologico X connesso ad uno spazio Y totalmente ordinato e con la order topology. Se per $a, b \in X$ risulta $f(a) < f(b)$ e se $f(a) < v < f(b)$, allora esiste $c \in X$ tale che $f(c) = v$.

Dimostrazione. Per assurdo, se un tale c non esistesse, si avrebbe (con notazioni di intervalli generalizzati):

$$f(X) \subset (-\infty, v) \cup (v, +\infty)$$

e pertanto

$$X \subset f^{-1}\big((-\infty, v) \cup (v, +\infty)\big) = f^{-1}\big((-\infty, v)\big) \cup f^{-1}\big((v, +\infty)\big)$$

e, poiché $a \in f^{-1}\big((-\infty, v)\big)$ e $b \in f^{-1}\big((v, +\infty)\big)$, si avrebbe una sconnessione di X, contrariamente alle ipotesi.

S connesso $\Rightarrow \bar{S}$ connesso

Proposizione. Sia S un sottoinsieme connesso dello spazio topologico (X, τ). Allora è connessa anche la chiusura $\bar{S}$.

Dimostrazione. Per assurdo, sia

$$\bar{S} = A \cup B$$

una sconnessione. Se S non è già chiuso (se lo fosse avremmo $\bar{S} = S$ e non vi sarebbe nulla da dimostrare), almeno uno tra A e B deve contenere punti del complementare $\complement_{\bar{S}} S$. Inoltre, essendo $\bar{S}$ l'insieme dei punti aderenti a S, sia A che B devono contenere punti di S. Ne seguirebbe che

$$S = (S \cap A) \cup (S \cap B)$$

sarebbe una sconnessione di S.

La relazione

Proposizione Siano S_1 e S_2 sottoinsiemi connessi di (X, τ) con $S_1 \cap S_2$ non vuoto. Allora $S = S_1 \cup S_2$ è connesso.

Dimostrazione. Per assurdo, sia $S = A \cup B$ una sconnessione e sia $x_0 \in S_1 \cap S_2$. Sia p. es. $x_0 \in A$. Certamente B, non vuoto, interseca uno tra S_1 e S_2 e sia esso S_1. Allora

$$S_1 = (S_1 \cap A) \cup (S_1 \cap B)$$

e una sconnessione di S_1.

Definizione Sia (X, τ) uno spazio topologico e siano x e y punti di X. Diciamo che x e y sono *connessi* se esiste un sottoinsieme S connesso di X che li contenga entrambi.

Connessione tra punti e dello spazio

Proposizione. Se, scelti comunque due punti x, y di X, essi sono connessi, allora X è connesso.

Dimostrazione. Sia, per assurdo $A \subset X$ aperto e chiuso con $A \neq \emptyset, X$.
Sia $x \in A$. Per ogni $y \in \complement_X A$ esiste per ipotesi un connesso $Z_y \supset \{x, y\}$. Allora $A \cap Z_y$ è aperto e chiuso in Z_y e non vuoto, poiché contiene x.

Ma è anche $A \cap Z_y \neq Z_y$, poiché $y \notin A$. Pertanto $A \cap Z_y$ è aperto, chiuso, proprio e non vuoto in Z_y. Ne segue che Z_y non è connesso.

Corollario. Siano S_α sottoinsiemi connessi di X con $\alpha \in J$, insieme di indici finito o infinito. Se $\bigcap_{\alpha\in} S_\alpha$ è non vuoto, allora l'unione

$$S = \bigcup_{\alpha \in J} S_\alpha$$

è connessa.

Dimostrazione. Siano $x_1, x_2 \in S$ e siano $x_1 \in S_{i_1}, x_2 \in S_{i_2}$. Per la Proposizione della precedente slide, $S_{i_1} \cup S_{i_2}$ è connesso, e dunque x_1 e x_2 sono connessi. Poiché x_1 e x_2 sono punti arbitrari di S, dalla precedente Proposizione di questa slide segue che S è connesso.

La componente connessa $C(x)$

Dal precedente corollario abbiamo che in ogni spazio topologico X la relazione

$$x \sim y \qquad \text{se e solo se} \qquad x \text{ e } y \text{ sono connessi}$$

è un'equivalenza.

Definizione. Le classi di equivalenza modulo $\sim$ in X si dicono *componenti connesse*. Indicheremo con $C(x)$ la componente connessa del punto $x \in X$. Dunque:

$$C(x) = \{y \in X \text{ tali che } x \text{ e } y \text{ sono connessi}\}$$

Proposizione. $C(x)$ è l'unione di tutti i connessi contenenti x. Inoltre $C(x)$ è connesso ed è chiuso in X.

Proprietà di $C(x)$

Proposizione. $C(x)$ è l'unione di tutti i connessi contenenti x. Inoltre $C(x)$ è connesso ed è chiuso in X.

Dimostrazione. Sia S un connesso contenente x. Allora per ogni $y \in S$, x e y sono connessi. Dunque $S \subset C(x)$, e $C(x)$ contiene l'unione di tutti i connessi contenenti x.

D'altra parte, se $y \in C(x)$, allora y appartiene a un connesso contenente x. Dunque:

$$C(x) \subset \{\text{unione di tutti i connessi contenenti } x\}.$$

Come tale, $C(x)$ è connesso (corollario precedente). Inoltre $\overline{C(x)}$, chiusura di un connesso, è connesso, e contiene x. Ne segue $\overline{C(x)} \subset C(x)$, ovvero $C(x)$ è chiuso.

Osservazione. Le componenti connesse $C(x)$ possono o no essere aperte. P. es. in $(\mathbb{Q}, \mathcal{E})$ (topologia euclidea indotta), le componenti connesse sono i singoli punti, che sono chiusi ma non aperti.

Definizione. Uno spazio topologico le cui componenti connesse sono i singoli punti si dice *totalmente sconnesso*. Esempi di spazi totalmente sconnessi sono dunque gli spazi topologici con la topologia discreta, e $(\mathbb{Q}, \mathcal{E})$ (la cui topologia non è la topologia discreta!).

Un teorema

Teorema. Siano X_α, $\alpha \in J$, spazi topologici connessi. Allora il prodotto topologico $X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ è connesso.

Dimostrazione. Ci limitiamo al caso di due fattori $X = X_1 \times X_2$. Per induzione segue il caso di un numero finito di fattori. Per una famiglia J infinita di indici, la dimostrazione usa qualche altra considerazione, e si trova (per chi fosse interessato) nei libri di Sernesi e di Manetti.

Per $X = X_1 \times X_2$, l'argomento è molto semplice. Basta mostrare che ogni coppia di punti di X è connessa. Siano dunque $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in X = X_1 \times X_2$. Risulta

$$(x_1, x_2) \sim (x_1, y_2),$$

poiché entrambe le coppie sono contenute in $\{x_1\} \times X_2$, spazio evidentemente omeomorfo a X_2, che è connesso per ipotesi. Inoltre:

$$(x_1, y_2) \sim (y_1, y_2)$$

poiché entrambe le coppie sono contenute in $X_1 \times \{y_2\}$, omeomorfo a X_1, anch'esso connesso per ipotesi.

Dunque per transitività $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$ per ogni scelta dei punti $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ in $X = X_1 \times X_2$. Ne segue che X è connesso.

Immagine continua

Proposizione. Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua di spazi topologici. Se X è connesso, anche l'immagine $f(X) \subset Y$ è connessa.

Dimostrazione. Per assurdo, sia $f(X) = A \cup B$ una sconnessione. Allora

$$X \subset f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

sarebbe una sconnessione di X.

Ne segue immediatamente:

Corollario. La connessione è una proprietà topologica. In altri termini, se X è connesso e $h : X \to Y$ è un omeomorfismo di spazi topologici, allora anche Y è connesso.

E qualche altro esempio

A conclusione di questa sequenza di slides sulla connessione, osserviamo che abbiamo dimostrato la connessione di molti esempi di spazi topologici. Ne ricordiamo alcuni.

- Ogni intervallo della retta euclidea $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$.
- Ogni intervallo generalizzato in uno spazio totalmente ordinato con la order topology.
- $(\mathbb{R}^n, \mathcal{E})$ è connesso per prodotto. Similmente per prodotto il cubo $(\mathbb{I}^n, \mathcal{E})$, e ogni altro prodotto di intervalli.
- Ogni sottoinsieme convesso o stellato di $\mathbb{R}^n$, essendo i suoi punti a coppie connessi mediante intervalli o spezzate di due intervalli. In particolare il disco D^n aperto e la sua chiusura $\overline{D^n}$ sono connessi.
- La sfera
$$S^n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1},\ x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$$
è connessa. Risulta infatti:
$$S^n = \overline{S^n - \{p\}},$$
dove $S^n - \{p\}$ è la sfera privata di un punto (p. es. $p=$ polo nord), dal quale si effettua la *proiezione stereografica* di S^n, cfr. Foglio 2, esercizio 2. Tramite la proiezione stereografica, $S^n - \{p\}$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$, che è connesso. Dunque la sfera S^n è connessa come chiusura di un connesso.

Connessione per archi

Definizione. Sia $\mathbb{I} = [0,1]$ l'intervallo unitario della retta euclidea $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$, e sia (X, τ) uno spazio topologico. Un *arco* o *cammino* (in inglese "path") su X è un'applicazione continua

$$f : \mathbb{I} \to X.$$

I punti $f(0) = x_0$ e $f(1) = x_1$ si dicono rispettivamente *punto iniziale* e *punto finale* dell'arco f.

Definizione. Uno spazio topologico (X, τ) si dice *connesso per archi* se, per ogni coppia di punti x_0, $x_1 \in X$, esiste un arco $f : \mathbb{I} \to X$ tale che $f(0) = x_0$ e $f(1) = x_1$.

Teorema. Sia (X, τ) uno spazio topologico connesso per archi. Allora (X, τ) è connesso.

Dimostrazione. Per assurdo, sia $X = A \cup B$ una sconnessione. Scegliamo $x_0 \in A$ e $x_1 \in B$, e sia $f : \mathbb{I} \to X$ un arco tale che $f(0) = x_0$ e $f(1) = x_1$. Allora $\mathbb{I} = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ sarebbe una sconnessione dell'intervallo $\mathbb{I}$, che sappiamo essere connesso.

Il quadrato ordinato

Abbiamo visto nelle precedenti slides come sul quadrato unitario $\mathbb{I}^2 = \mathbb{I} \times \mathbb{I}$, insieme totalmente ordinato dall'ordinamento lessicografico

$$(x_1, y_1) < (x_2, y_2) \quad \Leftrightarrow \quad \{x_1 < x_2 \text{ oppure } x_1 = x_2, y_1 < y_2\},$$

sia possibile considerare la "order topology", scegliendo come base gli intervalli aperti limitati lessicografici

$$(a, b) = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tali che lessicograficamente} \quad a < z < b\}.$$

Abbiamo anche visto che tale spazio topologico ($\mathbb{I}^2$, order topology) è connesso essendo in se stesso l' "intervallo generalizzato" $(-\infty, +\infty)$.

Nella prossima slide dimostreremo:

Proposizione. ($\mathbb{I}^2$, order topology) non è connesso per archi.

Il quadrato ordinato non connesso per archi

Proposizione. ($\mathbb{I}^2$, order topology) non è connesso per archi.

Dimostrazione. Scegliamo $x_0 = (0,0), x_1 = (1,1) \in \mathbb{I}^2$, e supponiamo per assurdo che $f : \mathbb{I} \to \mathbb{I}^2$ sia un arco tale che $f(0) = x_0$ e $f(1) = x_1$. Teniamo presente che la continuità di f è rispetto alla topologia euclidea di $\mathbb{I}$ e alla order topology su $\mathbb{I}^2$. Osserviamo anche che, per il teorema del valore intermedio, l'applicazione f è suriettiva.

Consideriamo la famiglia non numerabile

$$\big\{\{x\} \times (0,1)\big\}_{x\in[0,1]}$$

di aperti in $\mathbb{I}^2$, a due a due disgiunti. La famiglia delle controimmagini

$$\big\{f^{-1}\big(\{x\} \times (0,1)\big)\big\}_{x\in[0,1]}$$

consiste per la continuità di f di aperti di $\mathbb{I}$, a due a due disgiunti. Per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, ognuno di tali aperti contiene un razionale. Ma essi sono una famiglia infinita non numerabile di aperti disgiunti.
Ne seguirebbe che i razionali dell'intervallo $\mathbb{I}$ non sono numerabili.

La chiusura di $y = \sin \frac{1}{x}$

Sia
$$X = \left\{(x, \sin \frac{1}{x}),\ x \in \mathbb{R}^+\right\} \subset \mathbb{R}^2,$$
grafico di funzione, con la topologia euclidea indotta da $\mathbb{R}^2$, e omeomorfo a $\mathbb{R}^+$. X è dunque connesso e connesso per archi.

Consideriamo ora $\bar{X}$, la chiusura di X in $\mathbb{R}^2$. Aggiungendo i punti di $\mathbb{R}^2$ aderenti al grafico X, si ottiene il segmento verticale:
$$\bar{X} = X \cup \left\{\{0\} \times [-1, 1]\right\}$$

Proposizione. $\bar{X}$ è connesso ma non è connesso per archi.

Dimostrazione. $\bar{X}$ è connesso, essendo chiusura del connesso X. (vedi relativa Proposizione in una slide precedente).

Per mostrare che X non è connesso per archi, sia $x_0 \in \left\{\{0\} \times [-1, 1]\right\}$ e sia $U_{x_0} = D_\epsilon x_0 \cap \bar{X}$ un intorno sufficientemente piccolo di x_0. Si osservi che U_{x_0} non è connesso, e che la componente connessa di x_0 è un intervallo aperto del segmento $\{0\} \times [-1, 1]$. Se assumiamo per assurdo che esista un arco $f : \mathbb{I} \to \bar{X}$ con $f(0) = x_0$ e $f(1) = x_1$, e scegliendo $x_1 \in X \cap U_{x_0}$, vediamo che ciò non è possibile, in quanto l'immagine (connessa) dell'arco f deve appartenere alla componente connessa di x_0.

$g : X \to Y$

Proposizione. Sia $g : X \to Y$ un'applicazione continua di spazi topologici. Se X è connesso per archi, anche l'immagine $g(X) \subset Y$ è connessa per archi.

Dimostrazione. Finalmente non per assurdo! Siano $y_0, y_1 \in g(X)$. Allora esistono $x_0, x_1 \in X$ con $y_0 = g(x_0), y_1 = g(x_1)$ e sia $f : \mathbb{I} \to X$ un arco da x_0 a x_1. Allora

$$g \circ f : \mathbb{I} \to Y$$

è un arco in $g(X) \subset Y$ da y_0 a y_1.

Ne segue immediatamente:

Corollario. La connessione è per archi una proprietà topologica. In altri termini, se X è connesso per archi e $h : X \to Y$ è un omeomorfismo di spazi topologici, allora anche Y è connesso per archi.

Esercizio. Definire, su uno spazio topologico arbitrario cosa sono le *componenti connesse per archi*. Esaminare al riguardo l'esempio del quadrato ordinato $\mathbb{I}^2$ e l'esempio $\bar{X}$, chiusura del grafico di $y = \sin \frac{1}{x}$.

$\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^n$

Teorema. La retta euclidea $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ non è omeomorfa allo spazio euclideo $(\mathbb{R}^n, \mathcal{E})$, per $n \geq 2$.

Dimostrazione. Sia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ un omeomorfismo con $n \geq 2$, e notiamo che non disponiamo di proprietà topologiche per distinguere $\mathbb{R}$ da $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ (entrambi metrizzabili, secondo numerabili, connessi, connessi per archi, ...).

Ma se h è un omeomorfismo, anche

$$h|_{\mathbb{R}-\{0\}} : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}^n - \{h(0)\}$$

è un omeomorfismo. Questo non è possibile poiché $\mathbb{R} - \{0\}$ non è connesso per archi, mentre, se $n \geq 2$, $\mathbb{R}^n - \{h(0)\}$ sì.

Osservazione. La precedente dimostrazione, benché assai semplice, è alquanto indicativa di come si possa procedere per affrontare il problema dell'invarianza topologica della dimensione.

P. es. se $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ fosse un omeomorfismo con $n \geq 3$, si può pensare di togliere un punto a $\mathbb{R}^2$ e il punto immagine in $\mathbb{R}^n$. L'impossibilità di avere un omeomorfismo h è data qui dal fatto che $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ non è *semplicemente connesso* ma, se $n \geq 3$, lo spazio $\mathbb{R}^n - \{h(0)\}$ lo è.

Localmente euclideo

Introduciamo ora una classe importante di spazi topologici, e centrali anche in geometria differenziale e complessa.

Sono spazi topologici a cui viene associata in modo naturale una dimensione. Sono spesso denotati con M, o M^n per segnalarne la dimensione, e la lettera M è iniziale dalla parola inglese "Manifold".

Definizione. Sia M uno spazio topologico di Hausdorff e a base numerabile. M si dice una *varietà topologica di dimensione n* se ogni punto $p \in M$ ammette in intorno U_p omeomorfo a un disco aperto $D_r\,0$ di $\mathbb{R}^n$.

Si sottintende qui la topologia euclidea in $\mathbb{R}^n$, e dunque la topologia indotta sul disco $D_r\,0$.

L'omeomorfismo da U_p a $D_r\,0$ si dice *carta locale*; essa consente di utilizzare, per i punti di $U_p \subset M$, le coordinate $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ di $D_r\,0 \subset \mathbb{R}^n$ come *coordinate locali* su M.

Esempi

Menzioniamo alcuni esempi di varietà topologiche.

- Ogni aperto $A \subset \mathbb{R}^n$.
- La sfera S^n.
- Ogni ipersuperficie $f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0$ di $\mathbb{R}^{n+1}$, dove f è di classe C^1 e con gradiente non nullo in tutti i punti con $f = 0$; le carte e coordinate locali sono definite come conseguenza del teorema delle funzioni implicite.
- Gli spazi proiettivi reali $P^n(\mathbb{R})$ e complessi $P^n(\mathbb{C})$.
- I gruppi topologici di matrici $GL(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{R})$, $O(n, \mathbb{R})$, $SO(n, \mathbb{R})$, $U(n)$.

Esercizio: Cercare di determinare la dimensione di ognuno dei precedenti esempi di varietà topologiche.

Equivalenza delle due connessioni

Teorema. Sia M varietà topologica. M è connessa se e solo se è connessa per archi.

Dimostrazione. Sappiamo già che l'implicazione "connesso per archi" $\Rightarrow$ "connesso" vale per ogni spazio topologico. Dimostriamo l'altra implicazione.

Sia M una varietà topologica connessa; fissiamo $p \in M$ e consideriamo il sottoinsieme di M:

$$Z_p = \{q \in M \text{ tali che esiste un arco } f \text{ da } p \text{ a } q\}.$$

Osserviamo che

- Z_p è non vuoto: $p \in Z_p$.
- Z_p è aperto. Se $q \in Z_p$, allora tutti i punti dell'intorno U_q appartengono a Z_p; essi infatti, usando le coordinate locali, sono congiungibili con un "raggio" al "centro" q di U_q. Dunque, per composizione di archi, essi sono congiungibili a p.
- Z_p è chiuso. Infatti il complementare è aperto. Se $q \notin Z_p$, allora tutti i punti dell'intorno U_q non possono appartenere a Z_p. Se così non fosse, vi sarebbe un $q' \in U_q$ congiungibile con un arco a p. Ma allora lo sarebbe, ancora per composizione arco/raggio, anche q.

Ne segue che Z_p, aperto, chiuso, e non vuoto nello spazio connesso M, è tutto M. Dunque i punti di M sono tutti congiungibili con un arco al punto fissato p. Pertanto, per composizione di archi, ogni coppia di punti di M è congiungile con un arco.