

Curvatura di superfici in \mathbb{R}^3

Altri argomenti

P. Piccinni

Corso di Geometria II (A-L), a.a. 2019-20
Laurea Triennale in Matematica
Sapienza Università di Roma Classroom - codice 24bsdao

Lezione del 21 maggio 2020, durata 2 ore
Lezione del 26 maggio 2020, durata 2 ore
Lezione del 28 maggio 2020, durata 2 ore

1 Isometrie e isometrie locali

- Introduzione
- Definizione
- Isometrie e lunghezze di curve
- Le superfici come spazi metrici
- Isometrie tra superfici e tra spazi metrici

2 Parametri conformi

- Applicazioni conformi e applicazioni che conservano le aree
- Esempi
- Caratterizzazioni con E, F, G
- Parametrizzazioni conformi
- Esistenza di parametrizzazioni conformi
- Ancora elicoide
- E ancora catenoide

3 Superfici minime

- Curvatura media e parametri conformi
- Dimostrazione
- Immagini di superfici minime

4 La seconda forma fondamentale

- Forme quadratiche associate
- La ricerca del significato geometrico
- $\mathbf{w} = \dot{\gamma}(0)$
- $II_p(\mathbf{w}) = k \cos \theta$
- Curvatura normale
- Teorema di Meusnier
- Descrizione di \mathbf{w} sul piano tangente
- Formula di Eulero
- k_1 e k_2 minimo e massimo della curvatura normale k_n

5 Curvatura gaussiana

- Limite del quoziente di aree
- Determinante di dg_p
- Confronto tra definizioni

Qualche esempio

Abbiamo visto, nel precedente file "Curvatura delle superfici di \mathbb{R}^3 - Definizioni e formule di calcolo", che piano e cilindro sono *superfici localmente isometriche*. Ciò è del tutto in linea con l'intuizione: si può infatti aprire un foglio di carta avvolto a cilindro e stenderlo isometricamente sul piano. Se vivessimo sulla superficie laterale di un pianeta cilindrico, sarebbe possibile e facile realizzare carte geografiche che non alterino alcuno degli elementi metrici del nostro pianeta.

Un altro esempio, anch'esso presente nel mio precedente file, è costituito dalla coppia elicoide/catenoide, cfr. relativi esercizi e figure alla fine del precedente file.

Il video youtube:

"<https://www.youtube.com/watch?v=LNABUiPwPrE>"

mostra come, togliendo un meridiano dal catenoide, sia possibile deformato isometricamente in una sezione di elicoide. Al pari della coppia piano/cilindro, anche la coppia elicoide/catenoide fornisce esempi di *superfici localmente isometriche*, ma non (per motivi topologici) globalmente isometriche.

Che cos'è un'*isometria tra superfici*?. Daremo la definizione nella prossima slide. Ci porremo poi il problema se le superfici differenziabili di \mathbb{R}^3 siano spazi metrici. E quindi il problema se le isometrie tra superfici sono anche isometrie di tali spazi metrici.

$$F : S_1 \rightarrow S_2$$

Definizione. Siano S_1 e S_2 superfici regolari di \mathbb{R}^3 (cfr. definizione nel file "Superfici differenziabili di \mathbb{R}^3 .pdf"), e sia $F : S_1 \rightarrow S_2$ un'applicazione differenziabile. F si dice un'*isometria* se "conserva il prodotto scalare sui piani tangenti", ovvero se per ogni $p \in S_1$ e ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_p S_1$, risulta:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_p = \langle dF_p \mathbf{v}, dF_p \mathbf{w} \rangle_{F(p)},$$

dove $dF_p : T_p S_1 \rightarrow T_{F(p)} S_2$ è il differenziale di F nel punto $p \in S_1$.

Definizione. $F : S_1 \rightarrow S_2$ si dice un'*isometria locale* se per ogni $p \in S_1$ esiste un suo intorno $U \subset S_1$ tale che $F : U \rightarrow F(U) \subset S_2$ è un'*isometria*.

Dalla definizione segue subito la seguente caratterizzazione (per la dimostrazione si veda la video-lezione n. 9 parte 1 del Prof. Arezzo).

Proposizione. $F : S_1 \rightarrow S_2$ è un'*isometria locale* se e solo se, per ogni $p \in S_1$, esistono parametrizzazioni $\alpha : U \rightarrow V$ di un intorno $V \subset S_1$ di p e $\beta : U \rightarrow F(V)$ dell'intorno $F(V) \subset S_2$ di $F(p)$ (definite sullo stesso $U \subset \mathbb{R}^2$) tali che, detti E_1, F_1, G_1 e E_2, F_2, G_2 i coefficienti delle rispettive prime forme fondamentali, risulta

$$E_1 = E_2, \quad F_1 = F_2, \quad G_1 = G_2.$$

$$\ell(C) = \ell(F(C))$$

Altre caratterizzazioni delle isometrie tra superfici possono essere date in relazione alle lunghezze di curve contenute nelle superfici stesse.

Ricordiamo (cfr. file "Superfici differenziabili di \mathbb{R}^3 ") che la lunghezza di una curva $C : \gamma(t) = \alpha(u(t), v(t))$, contenuta nella superficie parametrizzata $S : \alpha(u, v)$ è data dall'integrale

$$\ell(C) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{Eu'(t)^2 + 2Fu'(t)v'(t) + Gv'(t)^2} dt.$$

Vale allora la seguente

Proposizione. L'applicazione differenziabile $F : S_1 \rightarrow S_2$ tra superfici S_1 e S_2 di \mathbb{R}^3 un'isometria se e solo se per ogni curva C contenuta in S_1 , la sua lunghezza è preservata da F :

$$\ell(C) = \ell(F(C)).$$

La dimostrazione è ancora nel video-lezione n. 9 parte 1 del Prof. Arezzo.

La distanza intrinseca

Osservazione. Dato che le superfici S che stiamo considerando sono sottoinsiemi di \mathbb{R}^3 , esse ricevono dall'ambiente euclideo una *distanza estrinseca*. Per ogni $p, q \in S$, la loro distanza estrinseca è la lunghezza del segmento \overline{pq} di \mathbb{R}^3 . Rispetto a tale distanza estrinseca una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ è dunque uno spazio metrico.

La nozione di lunghezze di curve differenziabile contenute in una superficie S consente di dotare S anche di una *distanza intrinseca*.

Esercizio. Sia S una superficie differenziabile di \mathbb{R}^3 . Si consideri l'applicazione

$$d : S \times S \longrightarrow \mathbb{R},$$

definita dalla formula

$$d(p, q) = \inf \ell(C),$$

dove C varia nell'insieme delle curve differenziabili con estremi p e q e contenute in S .

Dimostrate che d è una distanza nell'insieme S . La distanza d è detta *distanza intrinseca sulla superficie S* .

$$\ell(C) = \ell(F(C))$$

Il termine "isometria" $F : S_1 \rightarrow S_2$ tra superfici di \mathbb{R}^3 utilizzato e commentato, con varie definizioni equivalenti nelle precedenti slides, richiama lo stesso termine "isometria" tra spazi metrici, un'applicazione $F : X_1 \rightarrow X_2$ tale che dette d_1 e d_2 le distanze rispettivamente in X_1 e in X_2 , soddisfa la proprietà

$$d_1(x, y) = d_2(F(x), F(y)) \text{ per ogni } x, y \in X_1.$$

Ricordiamo che, portando dischi aperti in dischi aperti dello stesso raggio, le isometrie $F : X_1 \rightarrow X_2$ sono particolari omeomorfismi tra i due spazi topologici definiti dalle distanze.

Proposizione. Siano S_1 e S_2 superfici differenziabili di \mathbb{R}^3 .

Un'applicazione $F : S_1 \rightarrow S_2$ è un'isometria tra superfici (ovvero conserva il prodotto scalare tra vettori tangenti) se e solo se F è un'isometria tra gli spazi metrici S_1 e S_2 definiti dalle rispettive distanze intrinseche d_1 e d_2 .

Ulteriori informazioni, e parte della dimostrazione della precedente Proposizione, si trovano nel file del Prof. A. Sambusetti

Definizioni

La nozione di isometria (o, similmente, di isometria locale) $F : S_1 \rightarrow S_2$ tra superfici può essere generalizzata in due direzioni diverse.

Definizione. Diciamo che l'applicazione differenziabile

$$F : S_1 \rightarrow S_2$$

è un'*applicazione conforme* se per ogni $p \in S$, il differenziale

$$dF_p : T_p S \rightarrow T_{F(p)} S_2$$

conserva gli angoli tra vettori tangenti.

Definizione Diciamo che

$$F : S_1 \rightarrow S_2$$

conserva le aree se porta regioni limitate su S_1 in regioni limitate su S_2 conservandone le aree.

Fate i disegni!

Esempi - Esercizi

I seguenti esercizi richiedono un certo impegno. È comunque assai utile fare dei disegni e cercare di comprendere quanto affermato.

Esercizio 1. Siano S_1 il piano (u, v) e S_2 la sfera S^2 di centro l'origine, raggio 1 e privata del polo nord. Verificate che l'applicazione $F : S_1 \rightarrow S_2$

$$F : (u, v) \in S_1 = \mathbb{R}^2 \rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right) \in S_2 = S^2$$

è conforme. Segnaliamo che F è l'inversa della proiezione stereografica, dal polo nord, dei punti della sfera sul piano equatoriale.

Esercizio 2. (Teorema di Archimede). Siano S_1 la sfera S^2 di centro l'origine e raggio 1 privata dei poli nord e sud e S_2 la superficie cilindrica circoscritta a S^2 nel suo equatore e con $-1 < z < 1$. Si consideri l'applicazione $F : S_1 \rightarrow S_2$ che associa a un punto $p \in S_1$ il punto $F(p)$ ottenuto intersecando il cilindro S_2 con la semiretta orizzontale per p e uscente dall'asse z , asse del cilindro. Verificate che F conserva le aree.

Definizione

Similmente a quanto visto per le isometrie, sia le applicazioni conformi che le applicazioni che conservano le aree possono essere caratterizzate con i coefficienti della prima forma fondamentale. Ci riferiamo qui solo a superfici regolari parametrizzate $S_1 : \alpha(u, v)$ e $S_2 : \beta(u, v)$ con $(u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2$.

Proposizione 1. L'applicazione differenziabile $F : S_1 \rightarrow S_2$ è un'applicazione conforme se e solo se, detti E_1, F_1, G_1 e E_2, F_2, G_2 i coefficienti delle rispettive prime forme fondamentali, esiste una funzione differenziabile positiva $\lambda(u, v) > 0$ tale che

$$(E_2, F_2, G_2) = \lambda(u, v)(E_1, F_1, G_1).$$

Proposizione 2. L'applicazione differenziabile $F : S_1 \rightarrow S_2$ conserva le aree se e solo se, detti E_1, F_1, G_1 e E_2, F_2, G_2 i coefficienti delle rispettive prime forme fondamentali, risulta

$$E_2 G_2 - F_2^2 = E_1 G_1 - F_1^2.$$

Definizione

In particolare:

Definizione. Diciamo che la parametrizzazione $\beta : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ della superficie S è una *parametrizzazione conforme*, e dunque che $(u, v) \in U$ sono *parametri conformi* (o *parametri isotermi*) per S se β è un'applicazione conforme dalla superficie U alla superficie S .

Dalla Proposizione 1 della precedente slide segue subito la seguente importante caratterizzazione delle parametrizzazioni conformi:

Teorema. La parametrizzazione $\beta : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ della superficie S è una parametrizzazione conforme se e solo se i coefficienti E, F, G di S soddisfano le seguenti identità

$$E \equiv G, \quad F \equiv 0.$$

Il Teorema

Il seguente teorema viene in genere dimostrato nella Laurea Magistrale (corso di Istituzioni di Geometria superiore; cfr. p. es. Teor. 4.14, pp. 22-24 del Cap.9, Prof. R. Salvati Manni):

"<http://www1.mat.uniroma1.it/people/salvati/index.php?module=istgeom>"

Teorema. Sia S una superficie differenziabile regolare di \mathbb{R}^3 e assumiamo che S sia orientabile. Allora S ammette un atlante di parametrizzazioni locali conformi.

Osservazione. Questo teorema può essere visto in analogia con l'esistenza del parametro di ascissa curvilinea per le curve regolari.

Tuttavia, mentre tutte le curve regolari sono rettificabili, ovvero localmente isometriche (tramite l'ascissa curvilinea) alla retta euclidea \mathbb{R} , è falso che tutte le superfici regolari siano "pianificabili".

P. es. se $S = S^2$, è ben noto che non esistono carte geografiche (piane) che diano una rappresentazione isometrica di una porzione, anche piccolissima, della superficie sferica S^2 . Esistono però, secondo il precedente teorema carte conformi, ovvero carte che preservino gli angoli. Si confronti con il precedente Esercizio 1, che descrive le carte conformi sulla sfera S^2 .

Vedremo, nel successivo e ultimo file, che la presenza su una superficie S di punti a curvatura gaussiana K non nulla impedisce l'esistenza di un'isometria tra S e il piano.

β con parametri conformi (u, v)

Rivediamo, in questa e nella successiva slide, gli esempi dell'elicoide e del catenoide.

- **Elicoide:** $\beta(u, v) = (\sin u \sinh v, \cos u \sinh v, u)$

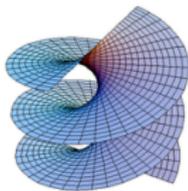


Figura 1 (da WikiCommons)

Ricordiamo che per tale $\beta(u, v)$, i parametri (u, v) sono conformi:

$$E = \cosh^2 v = G, \quad F \equiv 0.$$

Abbiamo qui dunque $ds^2 = \cosh^2 v (du^2 + dv^2)$, e la funzione positiva $\cosh^2 v$ è il fattore che rende il ds^2 dell'elicoide conforme a quello euclideo.

Le curvatures media e gaussiana dell'elicoide sono:

$$H \equiv 0, \quad K = -\frac{1}{\cosh^4 v},$$

e ricordiamo che $H \equiv 0$ corrisponde alla definizione di superficie minima; dunque l'elicoide è un esempio di superficie minima.

Ricordiamo anche che $\Delta\beta \equiv 0$, dove $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$ è l'operatore di Laplace.

La parametrizzazione β dell'elicoide (con i parametri conformi (u, v)) è dunque armonica.

γ con parametri conformi (u, v)

- **Catenoide:** $\gamma(u, v) = (\cos u \cosh v, -\sin u \cosh v, v)$

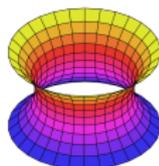


Figura 2 (da WikiCommons)

Anche qui i parametri (u, v) sono conformi:

$$E = \cosh^2 v = G, \quad F \equiv 0,$$

e ancora $ds^2 = \cosh^2 v (du^2 + dv^2)$, con la stessa funzione $\cosh^2 v$ che rende il ds^2 del catenoide conforme a quello euclideo. Ne segue l'esistenza di un'isometria locale tra elicoide e catenoide. Le curvatures media e gaussiana del catenoide sono:

$$H \equiv 0, \quad K = -\frac{1}{\cosh^4 v},$$

e dunque anche il catenoide è una superficie minima. Anche qui $\Delta\gamma \equiv 0$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$, e anche la parametrizzazione γ , con i parametri conformi (u, v) , è armonica.

Ricordiamo infine che le funzioni armoniche $\beta(u, v)$ e $\gamma(u, v)$ sono armoniche coniugate, verificando le condizioni di Cauchy-Riemann: $\beta_u = \gamma_v$, $\beta_v = -\gamma_u$, e $\delta(u, v) = \beta(u, v) + i\gamma(u, v)$ è olomorfa. Ciò si esprime dicendo che elicoide e catenoide sono *superfici minime coniugate*.

$\Delta\beta$ e H

Sia $S : \beta(u, v)$ una superficie parametrizzata regolare, e assumiamo che (u, v) siano parametri conformi. Dunque risulta $E \equiv G$, $F \equiv 0$. Siano \mathbf{N} il versore normale di S e sia H la sua curvatura media.

Teorema. Nelle ipotesi menzionate risulta

$$\Delta\beta = 2EH\mathbf{N}$$

Dimostreremo il teorema nella prossima slide. Qui osserviamo che, poiché $E > 0$, ne segue immediatamente il

Corollario. La superficie S è minima se e solo se le sue rappresentazioni $\beta(u, v)$, con parametri conformi (u, v) , sono armoniche.

Calcoli

Dimostrazione del teorema. Si consideri l'identità $\langle \beta_u, \beta_u \rangle \equiv \langle \beta_v, \beta_v \rangle$ ($E \equiv G$), e la si derivi rispetto a u e a v . Si ottiene

$$\langle \beta_{uu}, \beta_u \rangle = \langle \beta_{uv}, \beta_v \rangle, \quad \langle \beta_{vv}, \beta_v \rangle = \langle \beta_{uv}, \beta_u \rangle.$$

D'altra parte derivando rispetto a u e a v l'identità $\langle \beta_u, \beta_v \rangle \equiv 0$ ($F \equiv 0$) si ha

$$\langle \beta_{uu}, \beta_v \rangle = -\langle \beta_u, \beta_{uv} \rangle, \quad \langle \beta_{uv}, \beta_v \rangle = -\langle \beta_u, \beta_{vv} \rangle.$$

Ne segue:

$$\langle \Delta\beta, \beta_u \rangle = \langle \beta_{uu}, \beta_u \rangle + \langle \beta_{vv}, \beta_u \rangle \equiv 0, \quad \langle \Delta\beta, \beta_v \rangle = \langle \beta_{uu}, \beta_v \rangle + \langle \beta_{vv}, \beta_v \rangle \equiv 0.$$

Dunque $\Delta\beta$, essendo perpendicolare sia a β_u che a β_v , risulta parallelo al versore normale \mathbf{N} .

Non resta che calcolare il loro prodotto scalare. Derivando $\langle \beta_u, \mathbf{N} \rangle \equiv \langle \beta_v, \mathbf{N} \rangle \equiv 0$ si ha:

$$\langle \Delta\beta, \mathbf{N} \rangle = \langle \beta_{uu}, \mathbf{N} \rangle + \langle \beta_{vv}, \mathbf{N} \rangle = -\langle \beta_u, \mathbf{N} \rangle - \langle \beta_v, \mathbf{N} \rangle,$$

e dunque

$$\langle \Delta\beta, \mathbf{N} \rangle = e + g,$$

dove e, f, g sono i coefficienti della seconda forma fondamentale. Ricordando la formula di

$$H = \frac{1}{2} \frac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2},$$

e tenendo conto che $E = G$, $F = 0$, si ha la conclusione.

Curiosità

- È possibile dimostrare che una superficie minima rigata (ovvero formata da rette che escono dai punti di una curva) è necessariamente contenuta in un piano o in un elicoide.
- Similmente si può dimostrare che una superficie minima di rotazione (ottenuta per rotazione di una curva attorno a un asse) è contenuta in un piano o in un catenoide.
- Le superfici minime di \mathbb{R}^3 sono tuttora non classificate. La loro teoria costituisce un interessante capitolo della matematica, tra la geometria e l'analisi .
- Essendo $H = 2(k_1 + k_2) = 0$, risulta $K = k_1 k_2 \leq 0$, e dunque una superficie minima non può avere punti ellittici.
- Ripropongo un sito dove si possono vedere molte immagini di superfici minime " <http://virtualmathmuseum.org/Surface>"
- Incoraggio anche (con piena libertà) di approfondire l'argomento, p. es. con la lettura delle belle pagine Wikipedia "Superficie minime" e "Minimal surface".

Considerazioni preliminari

Abbiamo basato lo studio delle superfici differenziabili S di \mathbb{R}^3 sulle due forme fondamentali

$$I = \{I_p\}_{p \in S}, \quad II = \{II_p\}_{p \in S},$$

entrambi (campi differenziabili di) forme bilineari simmetriche sui piani tangenti di S . I loro coefficienti E, F, G, e, f, g (definiti non appena si fissi una rappresentazione parametrica locale) intervengono in tutte le formule che abbiamo preso in considerazione sulle superfici S : lunghezze di archi di curva, aree di regioni limitate, curvature, ...

Ben sappiamo dall'algebra lineare che ad ogni forma bilineare simmetrica si associa in modo naturale una forma quadratica (e viceversa). Usiamo gli stessi simboli $I = \{I_p\}_{p \in S}$, $II = \{II_p\}_{p \in S}$ per le forme quadratiche associate, ma indicando un solo argomento. Dunque:

$$I_p(\mathbf{v}) = I_p(\mathbf{v}, \mathbf{v}), \quad II_p(\mathbf{v}) = II_p(\mathbf{v}, \mathbf{v}).$$

$$I_p(\mathbf{w})$$

Naturalmente conosciamo il significato geometrico della prima forma quadratica fondamentale: essa fornisce, per ogni vettore tangente $\mathbf{v} \in T_p S$ il modulo al quadrato del vettore \mathbf{v} :

$$I_p(\mathbf{v}) = I_p(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = |\mathbf{v}|^2.$$

Per quanto riguarda invece la seconda forma quadratica fondamentale, possiamo senz'altro dire che se $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ è il normalizzato di \mathbf{v} , risulta:

$$I_p(\mathbf{v}) = I_p(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = |\mathbf{v}|^2 I_p(\mathbf{w}, \mathbf{w}),$$

e rimane da capire cosa sia $I_p(\mathbf{w}) = I_p(\mathbf{w}, \mathbf{w})$ per un versore \mathbf{w} .

Un modo per cercare di rispondere, è rendere più analitica la domanda. Consideriamo dunque una parametrizzazione regolare $\alpha(u, v)$ di S attorno al punto $p \in S$ e interpretiamo il versore $\mathbf{w} \in T_p S$ come versore velocità iniziale di una curva $\gamma(s) = (\alpha(u(s), v(s)))$ contenuta in S , parametrizzata con l'ascissa curvilinea s e tale che $p = \gamma(0)$.

Calcolo

Stiamo dunque assumendo:

$$\mathbf{w} = \dot{\gamma}(0).$$

dove $\gamma(s) = (\alpha(u(s), v(s)))$ è una curva contenuta in S , parametrizzata con l'ascissa curvilinea s e tale che $p = \gamma(0)$. Ricordiamo ora la definizione della seconda forma bilineare fondamentale:

$$II_p(\mathbf{w}) = II_p(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = - \langle dg_p(\mathbf{w}), \mathbf{w} \rangle_p = - \langle dg_p(\dot{\gamma}(0)), \dot{\gamma}(0) \rangle_p .$$

Il valore del differenziale $dg_p(\dot{\gamma}(0))$ dell'applicazione di Gauss $g : S \rightarrow S^2$ si ottiene guardando al vettore normale \mathbf{N} di S lungo la curva $\gamma(s)$ e derivando rispetto a s . Dunque:

$$dg_p(\dot{\gamma}(0)) = \dot{\mathbf{N}}(p).$$

Usiamo ora le notazioni tipiche delle curve: $\mathbf{t} = \dot{\gamma}(0)$ vettore tangente in p della curva $\gamma(s)$, e $\ddot{\gamma}(0) = \dot{\mathbf{t}} = k\mathbf{n}$, con k curvatura e \mathbf{n} vettore normale della curva $\gamma(s)$.

Conclusione

Otteniamo quindi:

$$II_p(\mathbf{w}) = - \langle dg_p(\dot{\gamma}(0)), \dot{\gamma}(0) \rangle_p = - \langle \dot{\mathbf{N}}(p), \dot{\gamma}(0) \rangle_p,$$

e dato che $\langle \mathbf{N}, \dot{\gamma} \rangle \equiv 0$, possiamo (cambiando il segno) spostare una derivazione al secondo argomento dell'ultimo prodotto scalare:

$$II_p(\mathbf{w}) = - \langle \dot{\mathbf{N}}(p), \dot{\gamma}(0) \rangle_p = \langle \mathbf{N}(p), \ddot{\gamma}(0) \rangle_p.$$

Dunque, poiché $\ddot{\gamma}(0) = k(p) \mathbf{n}(p)$

$$II_p(\mathbf{w}) = \langle \mathbf{N}(p), \ddot{\gamma}(0) \rangle_p = k(p) \langle \mathbf{N}(p), \mathbf{n}(p) \rangle_p,$$

e questa è la formula che risponde alla nostra domanda.

Proposizione Il valore della seconda forma quadratica fondamentale II_p su un versore $\mathbf{w} \in T_p S$ è il prodotto $k \cos \theta$ della curvatura $k(p)$ di una curva γ per p su S e avente in p versore velocità iniziale \mathbf{w} con il coseno dell'angolo θ compreso tra i versori normali $\mathbf{N}(p)$ e $\mathbf{n}(p)$ rispettivamente della superficie S e della curva γ .

Definizione

Ricordiamo che nel paragrafo $\mathbf{w} = \dot{\gamma}(0)$, abbiamo considerato una qualunque curva $\gamma(s)$ su S con vettore velocità iniziale $\mathbf{w} = \dot{\gamma}(0)$. Naturalmente esistono infinite siffatte curve $\gamma(s)$ e ognuna di esse ha in $p = \gamma(0)$ la sua curvatura $k(p) = k_\gamma(p)$ e il suo vettore normale $\mathbf{n}(p) = \mathbf{n}_\gamma(p)$. Per ogni tale curva γ si ha pertanto anche un angolo θ tale che $\cos \theta = \langle \mathbf{n}, \mathbf{N} \rangle$.

Definizione Sia $\gamma(s)$ come sopra. Il prodotto

$$k_n = k \cos \theta$$

si dice *curvatura normale* della curva $\gamma(s)$ nel punto $p = \gamma(0)$.

Due osservazioni:

- Se $\gamma(s)$ è una sezione normale, ovvero l'intersezione di S con un piano contenente la retta normale in p , e se l'orientazione di S è tale che $\mathbf{n} = \mathbf{N}$, risulta $k_n = k$.
- In generale, come sappiamo, per le curve risulta per definizione $k \geq 0$; e anzi qui, dato che utilizziamo il vettore normale \mathbf{n} , stiamo implicitamente assumendo $k > 0$. Per definizione invece non vi è restrizione sul segno della curvatura normale k_n ; inoltre la curvatura normale k_n può ben risultare nulla pur essendo $k > 0$.

Indipendenza della curvatura normale da $\gamma(s)$

Possiamo dunque riformulare l'ultima Proposizione (ovvero il significato geometrico di $II_p(\mathbf{w})$) nel modo seguente:

Proposizione. Sia come sopra $\mathbf{w} = \dot{\gamma}(0)$, per qualche curva γ su S . Allora

$$II_p(\mathbf{w}) = k_n$$

dove k_n è la curvatura normale della curva $\gamma(s)$ in $\gamma(0) = p \in S$.

Poiché k_n dipende solo dalla seconda fondamentale e dal versore \mathbf{w} , ne segue immediatamente il

Teorema di Meusnier. Tutte le curve γ contenute in S , passanti per $p \in S$ e aventi in p versore tangente assegnato, hanno in p la stessa curvatura normale.

È questo uno dei risultati settecenteschi della teoria, precedenti al lavoro di Gauss del 1827. Ne vedremo un altro nella prossima slide.

k_n e una base di autovettori

Immaginiamo ora un versore \mathbf{w} nel suo piano, il piano tangente $T_p S$. Esso descrive la circonferenza unitaria S^1 di tale piano vettoriale.

Ricordiamo che tale piano vettoriale ammette, per il teorema spettrale, una base ortonormale $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ di autovettori dell'operatore di Weingarten $dg_p : T_p S \rightarrow T_p S$ che, lo ricordiamo, è autoaggiunto rispetto a I_p .

Ricordiamo anche che le curvatures principali k_1 e k_2 sono per definizione gli autovalori, cambiati di segno, dell'operatore di Weingarten.

Dunque

$$dg_p(\mathbf{e}_1) = -k_1 \mathbf{e}_1, \quad dg_p(\mathbf{e}_2) = -k_2 \mathbf{e}_2$$

e assumiamo, per fissare le idee che sia $k_1 \leq k_2$.

Possiamo dunque scrivere, per ogni versore $\mathbf{w} \in T_p S$:

$$\mathbf{w} = \cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \phi \mathbf{e}_2$$

essendo ϕ l'angolo da \mathbf{e}_1 a \mathbf{w} .

k_n in funzione di k_1 e k_2

Dall'ultima Proposizione abbiamo dunque

$$k_n = II_p(\mathbf{w}, \mathbf{w}) = - \langle dg_p(\mathbf{w}), \mathbf{w} \rangle = - \langle dg_p(\cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \phi \mathbf{e}_2), \cos \phi \mathbf{e}_1 + \sin \phi \mathbf{e}_2 \rangle .$$

Da quanto sopra, dalla linearità di dg_p e dalla bilinearità del prodotto scalare, si ha subito la seguente

Formula di Eulero. Risulta

$$k_n = k_1 \cos^2 \phi + k_2 \sin^2 \phi$$

Ricordiamo nuovamente che la curvatura normale, associata al versore \mathbf{w} , coincide (con opportuna orientazione della superficie) con la curvatura della curva sezione normale, ovvero della curva intersezione di S con il piano contenente \mathbf{w} e \mathbf{N} .

La precedente formula descrive dunque la curvatura di tali sezioni normali, che si ottengono facendo variare il piano sezionante nel fascio di piani di asse la retta normale: per ogni versore \mathbf{w} abbiamo infatti un tale piano normale e una sezione normale.

Due esercizi

È ora utile svolgere i seguenti due esercizi.

Esercizio. Utilizzando la formula di Eulero, dimostrare che assumendo $k_1 < k_2$, le curvatures principali k_1 e k_2 sono rispettivamente il minimo e il massimo della curvatura delle sezioni normali, al variare del piano sezionante nel fascio di piani contenenti la retta normale.

Esercizio. Rivedere, alla fine del precedente file, gli esempi del cilindro, sfera, elicoide, catenoide e i valori nei singoli casi delle curvatures principali. Riflettere per ognuno di essi, sui valori che, secondo la formula di Eulero, assume la curvatura delle sezioni normali al variare del piano che le determina.

Definizione provvisoria di K

Ricordiamo che all'inizio del file precedente "Curvatura di superfici - Definizioni e formule di calcolo" abbiamo menzionato la seguente idea (o definizione provvisoria) di curvatura gaussiana $K(p)$ in un punto p di una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$:

$$K(p) = \lim_{\text{Area } R \rightarrow 0} \frac{\text{Area } g(R)}{\text{Area } R}$$

Qui g è l'applicazione di Gauss, R è una regione limitata contenente p al suo interno, e il limite è inteso su una successione $\{R_1, \dots, R_n, \dots\}$ di regioni convergenti a p ; ciò significa che ogni disco $D_r p$ in \mathbb{R}^3 di centro p contiene tutti le R_n con n abbastanza grande.

Nella precedente formula si assume sempre che $\text{Area } R > 0$, mentre si assume $\text{Area } g(R)$ positiva o negativa secondo che l'applicazione g conserva o non conserva un'orientazione (oraria o antioraria che sia) attorno al punto $p \in S$.

E definizione "operativa" di K

Abbiamo successivamente introdotto e estensivamente usato la seguente definizione di curvatura gaussiana:

$$K = \det(dg_p)$$

Da quest'ultima definizione abbiamo dedotto la utilissima formula analitica, in termini di una rappresentazione parametrica e quindi dei coefficienti della due forme fondamentali:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

che ci ha permesso di calcolare K per le varie superfici che abbiamo preso in considerazione.

Il teorema

Teorema. Sia $S : \alpha(u, v)$ una superficie parametrizzata regolare di \mathbb{R}^3 , sia $p \in S$ e $K(p) = \det(dg_p) \neq 0$ la curvatura gaussiana in p di S . Allora

$$K(p) = \lim_{\text{Area } R \rightarrow 0} \frac{\text{Area } g(R)}{\text{Area } R}$$

con le avvertenze sul limite e sul segno delle aree sopra precisate.

Vediamo la dimostrazione.

Stiamo dunque prendendo in considerazione sottoinsiemi compatti $Q \subset U \subset \mathbb{R}^2$ contenuti nell'aperto U dove è definita α . Ricordiamo che α è un omeomorfismo, e dunque anche le regioni $R = \alpha(Q)$ sono compatte. Denotiamo con $q \in Q$ il punto tale che $p = \alpha(q)$. Come visto nel primo file sulle superfici (e nel corso di Analisi II), l'area di R è data da:

$$\text{Area}(R) = \iint_Q \|\alpha_u \wedge \alpha_v\| \, du \, dv$$

Dimostrazione

Similmente:

$$|\text{Area } g(R)| = \iint_Q \|\mathbf{N}_u \wedge \mathbf{N}_v\| dudv.$$

Ricordiamo ora che

$$\begin{cases} dg(\alpha_u) = \mathbf{N}_u = a_{11}\alpha_u + a_{21}\alpha_v \\ dg(\alpha_v) = \mathbf{N}_v = a_{12}\alpha_u + a_{22}\alpha_v \end{cases}$$

dove

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \det(dg) = K.$$

Si ha quindi, con la precisata convenzione del segno:

$$\text{Area } g(R) = \iint_Q K \|\alpha_u \wedge \alpha_v\| dudv.$$

Seguito dimostrazione

Ne segue:

$$\lim_{\text{Area } Q \rightarrow 0} \frac{\text{Area } g(R)}{\text{Area } R} = \lim_{\text{Area } Q \rightarrow 0} \frac{\frac{\text{Area } g(R)}{\text{Area } Q}}{\frac{\text{Area } R}{\text{Area } Q}} = \frac{\lim_{\text{Area } Q \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\text{Area } Q} \iint_Q K \|\alpha_u \wedge \alpha_v\| dudv \right)}{\lim_{\text{Area } Q \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\text{Area } Q} \iint_Q \|\alpha_u \wedge \alpha_v\| dudv \right)}$$

Usiamo ora il teorema del valor medio per integrali.

Risulta, per opportuni punti $p_n \in R_n$ e $q_n \in Q$ tali che $p_n = \alpha(q_n)$, di cui p e q sono rispettivi limiti:

$$\lim_{\text{Area } Q \rightarrow 0} \frac{\text{Area } g(R)}{\text{Area } R} = \frac{\lim_{\text{Area } Q \rightarrow 0} \left(K(p_n) \|\alpha_u \wedge \alpha_v\|(p_n) \right)}{\lim_{\text{Area } Q \rightarrow 0} \left(\|\alpha_u \wedge \alpha_v\|(p_n) \right)} = K(p),$$

e il teorema è così dimostrato.