Prova scritta di Geometria II, a.a. 2016-17 - Prof. P. Piccinni - 25 gennaio 2017

a. Scrivere subito Matricola (obbligatoria), Cognome e Nome.
b. Utilizzare questi fogli per le risposte. I fogli protocollo sono invece per riflessioni o calcoli, e non vanno consegnati.
c. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Tempo a disposizione: 2 ore esatte

Matricola................................**Cognome**..**Nome**..

1. Si consideri sull' insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali la topologia $\mathcal{K}$ che ha per aperti, oltre a $\emptyset$ e a $\mathbb{R}$, gli intervalli $(-a, a)$ al variare di $a \in \mathbb{R}^+$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

   - $\boxed{1}$ $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ è compatto
   - $\boxed{2}$ $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ è connesso
   - $\boxed{3}$ $(\mathbb{R}, \mathcal{K})$ è di Hausdorff
   - $\boxed{4}$ $\mathcal{K}$ induce, su ogni sottoinsieme finito $S \subset \mathbb{R}$, la topologia discreta
   - $\boxed{5}$ Nessuna delle precedenti

2. Si considerino i sottospazi

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| \leq 1, |y| \leq 1\} \quad \text{(quadrato chiuso di centro l'origine e lato 2)},$$

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 2\} \quad \text{(disco chiuso di centro l'origine e raggio } \sqrt{2}),$$

   entrambi con la topologia euclidea indotta. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

   - $\boxed{1}$ X è un sottoinsieme aperto di Y
   - $\boxed{2}$ $\complement_Y X$ ha quattro componenti connesse e ognuna di esse è un aperto di Y
   - $\boxed{3}$ $\complement_Y X$ ha quattro componenti connesse e ognuna di esse è un chiuso di Y
   - $\boxed{4}$ $\complement_Y X$ è uno spazio compatto
   - $\boxed{5}$ Ogni successione di punti in $\complement_Y X$ che converge in Y converge anche in $\complement_Y X$
   - $\boxed{6}$ Nessuna delle precedenti

3. Si consideri la topologia cofinita $\mathcal{Z}$ in $\mathbb{R}$ (i chiusi sono i sottoinsiemi finiti), e la successione

$$a = \{a_n\} : \begin{cases} a_n = 0 & \text{se} \quad n \quad \text{è dispari} \\ a_n = \frac{1}{n} & \text{se} \quad n \quad \text{è pari} \end{cases}.$$

   Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

   - $\boxed{1}$ la successione a non converge ad alcun numero reale
   - $\boxed{2}$ la successione a converge a tutti i numeri reali
   - $\boxed{3}$ la successione a converge a tutti e soli i numeri naturali pari
   - $\boxed{4}$ la successione a converge a zero e ad altri numeri reali
   - $\boxed{5}$ la successione a converge a zero e solo a zero
   - $\boxed{6}$ Nessuna delle precedenti

4. Siano

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{1}{4} < x^2 + y^2 < 4\} \quad \text{e} \quad X = \complement_{\mathbb{R}^2} \overline{C}$$

   rispettivamente la corona circolare aperta e il complementare della sua chiusura, entrambi con la topologia euclidea indotta. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

   - $\boxed{1}$ C e X sono omeomorfi
   - $\boxed{2}$ C e X sono omotopicamente equivalenti
   - $\boxed{3}$ Né C né X sono semplicemente connessi
   - $\boxed{4}$ C e X hanno gruppi fondamentali isomorfi
   - $\boxed{5}$ Nessuna delle precedenti

5. Sia $\varphi : X \to Y$ un'applicazione continua tra spazi topologici connessi per archi. Si assuma che l'indotta

$$\varphi_* : \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Y, \varphi(x))$$

sia iniettiva. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- $\boxed{1}$ φ è iniettiva
- $\boxed{2}$ φ è un omeomorfismo
- $\boxed{3}$ φ è un rivestimento
- $\boxed{4}$ φ non può essere suriettiva
- $\boxed{5}$ Nessuna delle precedenti

6. Siano

$$S_g = T^2 \# \ldots^{(g)} \ldots \# T^2, \qquad S_{[r]} = \mathbb{R}P^2 \# \ldots^{(r)} \ldots \# \mathbb{R}P^2$$

le superfici compatta rispettivamente orientabile di genere g (somma connessa di g tori), e non orientabile di genere r (somma connessa di r piani proiettivi reali). Assumiamo $g, r \geq 1$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- $\boxed{1}$ La somma connessa $S_g \# S_{[r]}$ è omeomorfa alla superficie non orientabile $S_{[2g+r]}$
- $\boxed{2}$ La somma connessa $S_g \# S_{[r]}$ è omeomorfa alla superficie non orientabile $S_{[g+2r]}$
- $\boxed{3}$ Esistono infiniti valori di g e r tali la caratteristica di Eulero χ verifica $\chi(S_g) = \chi(S_{[r]})$
- $\boxed{4}$ Esistono infiniti valori di g e r tali che il gruppo fondamentale π_1 verifica $\pi_1(S_g) \cong \pi_1(S_{[r]})$
- $\boxed{5}$ I rivestimenti universali di T^2 e di $\mathbb{R}P^2$ sono omeomorfi
- $\boxed{6}$ Nessuna delle precedenti

7. Si consideri il sottospazio $X = T^2 \cup D^2$ di $\mathbb{R}^3$ unione di una superficie torica T^2 e del disco chiuso D^2 appartenente al piano equatoriale di T^2, e avente per frontiera la sua circonferenza di gola. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- $\boxed{1}$ X è una superficie topologia compatta
- $\boxed{2}$ X è semplicemente connesso
- $\boxed{3}$ Il gruppo fondamentale di X è isomorfo a $\mathbb{Z}$
- $\boxed{4}$ $X - \{p\}$, dove p è il centro del disco D^2, ha per retratto di deformazione T^2
- $\boxed{5}$ Nessuna delle precedenti