

# Teoria locale delle curve differenziabili in $\mathbb{R}^3$

P. Piccinni

Corso di Geometria II (A-L), a.a. 2019-20  
Laurea Triennale in Matematica  
Sapienza Università di Roma Classroom - codice 24bsdao

Lezione del 28 aprile 2020, durata 2 ore  
Lezione del 5 maggio 2020, durata 2 ore

- 1 Curve regolari in  $\mathbb{R}^3$ 
  - Introduzione
  - Curvatura e versore normale
  - Calcolo della curvatura
  - Piano osculatore
  - Curvatura di curve piane
  - Curvatura delle coniche
  - La spirale logaritmica
- 2 Apparato di Frenet
  - Triedro di Frenet
  - Variazione del piano osculatore
  - Torsione con segno
  - Elica circolare
  - Apparato di Frenet dell'elica
  - Torsione con un parametro qualsiasi
  - Seconda formula di Frenet
  - Dimostrazione formula torsione
  - Torsione dell'elica
- 3 Teorema fondamentale della teoria locale
  - Formule di Frenet
  - Introduzione al teorema fondamentale
  - Il teorema fondamentale
  - Dimostrazione
  - Conclusione

# Vettore tangente

In questo file consideriamo *curve differenziabili regolari* di  $\mathbb{R}^3$ . Dunque parametrizzazioni  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dove  $I$  è un intervallo della retta euclidea  $\mathbb{R}$ , ovvero

$$\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

come terna di funzioni differenziabili, equazioni parametriche della curva  $\alpha$ .

La regolarità  $\alpha'(t) \neq \mathbf{0}$ , che quasi sempre assumeremo soddisfatta, assicura in ogni punto  $P_0 = (x_0, y_0, z_0) = \alpha(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ , il *vettore tangente* non nullo

$$\alpha'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)),$$

e la *retta tangente* in  $P_0$ :  $x = x_0 + x'(t_0)t$ ,  $y = y_0 + y'(t_0)t$ ,  $z = z_0 + z'(t_0)t$ .

In particolare, si può riparametrizzare tramite un'*ascissa curvilinea*

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(\tau)\| d\tau,$$

e  $s'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0$  assicura l'invertibilità di  $s = s(t)$ , e pertanto una riparametrizzazione  $\alpha(t(s))$  con parametro l'ascissa curvilinea  $s$ , e a vettore tangente costantemente di modulo 1. Chiamiamo dunque **vettore tangente**

$$\mathbf{t} = \dot{\alpha}(s) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}$$

e lo useremo immediatamente.

## Derivata seconda di $\alpha(s)$

Dalla seguente identità (dove  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  è il prodotto scalare di  $\mathbb{R}^3$ )

$$\langle \dot{\alpha}(s), \dot{\alpha}(s) \rangle = \langle \mathbf{t}, \mathbf{t} \rangle \equiv 1,$$

per derivazione rispetto a  $s$  abbiamo

$$2 \langle \dot{\mathbf{t}}, \mathbf{t} \rangle = \langle \dot{\mathbf{t}}, \mathbf{t} \rangle + \langle \mathbf{t}, \dot{\mathbf{t}} \rangle \equiv 0.$$

Dunque il vettore  $\ddot{\alpha} = \dot{\mathbf{t}}$  è perpendicolare al versore tangente  $\mathbf{t} = \dot{\alpha}$ .

**Definizione** Il modulo

$$k(s) = \|\dot{\mathbf{t}}(s)\| = \|\ddot{\alpha}(s)\|$$

si dice **curvatura** della curva  $\alpha$ . Il versore

$$\mathbf{n} = \frac{1}{k(s)} \dot{\mathbf{t}}(s)$$

si dice **versore normale** della curva  $\alpha$ .

# Con un'ascissa curvilinea $s$

Dunque se abbiamo le equazioni parametriche

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s)$$

di una curva, con parametro un'ascissa curvilinea  $s$ , la curvatura è subito data dalla formula:

$$k(s) = \sqrt{\ddot{x}(s)^2 + \ddot{y}(s)^2 + \ddot{z}(s)^2} \geq 0$$

Non abbiamo esplicitamente menzionato che data una curva di equazioni parametriche

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

risulta generalmente non facile riparametrizzare con un'ascissa curvilinea  $s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha(\tau)\| d\tau$ .

È dunque assai opportuna una formula che dia la curvatura  $k(t)$  per un parametro  $t$  arbitrario.

# Con un parametro qualsiasi $t$

Ecco la formula assai opportuna:

$$k(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

dove al numeratore appare il modulo del prodotto vettoriale indicato.

Dimostrazione. Per derivazione delle funzioni composte risulta:

$$\alpha'(t) = \dot{\alpha} s'(t), \quad \alpha''(t) = \ddot{\alpha} s'(t)^2 + \dot{\alpha} s''(t).$$

Dunque il prodotto vettoriale è  $\alpha' \wedge \alpha'' = (\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}) s'(t)^3$ . Ricordando che  $\dot{\alpha} = \mathbf{t}$  e che  $\ddot{\alpha} = \dot{\mathbf{t}} = k\mathbf{n}$ , si ottiene:

$$\|\alpha' \wedge \alpha''\| = k \|\mathbf{t} \wedge \mathbf{n}\| s'(t)^3.$$

Poiché  $\|\mathbf{t} \wedge \mathbf{n}\| \equiv 1$  e  $s'(t) = \|\alpha'\|$ , ne segue la formula in cornice.

# Equazione del piano osculatore

Sia  $P_0 = (x_0, y_0, z_0) = \alpha(t_0)$  un punto della curva  $\alpha(t)$ , e supponiamo che in  $P_0$  la curvatura non si annulli:  $k(t_0) \neq 0$ . Per la precedente formula, ciò è equivalentemente all'indipendenza lineare dei vettori  $\alpha'(t_0)$  e  $\alpha''(t_0)$ . In questa ipotesi, come visto nella precedente dimostrazione, il piano vettoriale generato da  $\alpha'(t_0)$  e  $\alpha''(t_0)$  coincide con il piano vettoriale generato dai versori  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{n}$ .

**Definizione.** Il piano affine per  $P_0 = \alpha(t_0)$  e parallelo ai due vettori  $\alpha'(t_0)$  e  $\alpha''(t_0)$  - ovvero ai versori tangente  $\mathbf{t}$  e normale  $\mathbf{n}$  in  $P_0$  - si dice *piano osculatore* di  $\alpha$  in  $P_0$ .

Il piano osculatore ha dunque equazione cartesiana

$$\det \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{pmatrix} = 0.$$

**Osservazione.** Se la curva  $\alpha$  è contenuta in un piano affine di  $\mathbb{R}^3$ , in ogni punto il piano osculatore è il piano della curva. In generale, il piano osculatore di  $\alpha$  in  $P_0$  è il "piano che meglio approssima la giacitura della curva in un intorno di  $P_0$ ".

# Curve piane

In particolare per una curva piana

$$\alpha(t) : \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z \equiv 0$$

risulta  $\alpha' = (x', y', 0)$  e  $\alpha'' = (x'', y'', 0)$ . Pertanto

$$\alpha' \wedge \alpha'' = (0, 0, x'y'' - x''y').$$

**Corollario.** La curvatura per curve piane è data dalla formula

$$k(t) = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

In particolare, per curve grafico  $y = f(x)$ , dalla parametrizzazione  $x = t$ ,  $y = f(t)$ , risulta:

$$k(x) = \frac{|f''(x)|}{(1 + f'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

e la curvatura è nulla in tutti e soli i punti  $x_0$  tali che  $f''(x_0) = 0$ .



# Ellissi, iperbole, parabola

Consideriamo le seguenti rappresentazioni analitiche delle tre coniche generali: ellissi, iperbole e parabola, in forma canonica.

$$\alpha_{ell}(t) : \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad \alpha_{iperb}(t) : \begin{cases} x = a \cosh t \\ y = b \sinh t \end{cases} \quad f_{parab}(x) : y = \frac{1}{2p}x^2$$

**Esercizio.** Dedurre dalle formule della precedente slides che le curvature delle tre coniche sono:

$$k_{ell} = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}, \quad k_{iperb} = \frac{ab}{(a^2 \sinh^2 t + b^2 \cosh^2 t)^{\frac{3}{2}}}, \quad k_{parab} = \frac{1}{p(1 + \frac{x^2}{p^2})^{\frac{3}{2}}}.$$

Determinare poi, per ognuna delle tre coniche, i "vertici", punti in cui la curvatura è massima o è minima.

# Calcolo della curvatura

Calcoliamo ora la curvatura della spirale logaritmica:

$$\alpha(t) : \quad x(t) = e^{-t} \cos t, \quad y(t) = e^{-t} \sin t, \quad z(t) \equiv 0.$$

Risulta:

$$\alpha'(t) : \quad x'(t) = -e^{-t}(\cos t + \sin t), \quad y'(t) = e^{-t}(\cos t - \sin t), \quad z'(t) \equiv 0,$$

$$\alpha''(t) : \quad x''(t) = 2e^{-t} \sin t, \quad y''(t) = -2e^{-t} \cos t, \quad z''(t) \equiv 0,$$

e dunque:

$$k(t) = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2e^{-2t}}{2\sqrt{2}e^{-3t}} = \frac{e^t}{\sqrt{2}}.$$

Si noti che la curvatura assume tutti i valori reali positivi, tendendo a infinito quando la spirale si avvicina all'origine.

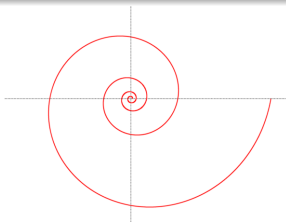


Figura 1, da Wiki Commons

# Ricalcolo con l'ascissa curvilinea

Naturalmente, possiamo riottenere la curvatura della spirale logaritmica usando l'ascissa curvilinea  $s(t) = \sqrt{2}(1 - e^{-t})$ , cfr. file "Curve in  $\mathbb{R}^3$ .pdf":

Con la funzione inversa  $t = -\log\left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$ , otteniamo la parametrizzazione della spirale logaritmica con  $s \in (-\infty, \sqrt{2})$ :

$$\alpha(s) : x(s) = \left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}}\right) \cos \log\left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}}\right), y(s) = -\left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}}\right) \sin \log\left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}}\right), z(s) \equiv 0$$

Dunque le componenti del vettore tangente  $\mathbf{t} = \dot{\alpha}(s)$  sono:

$$\dot{x}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ -\cos \log\left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}}\right) + \sin \log\left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}}\right) \right], \quad \dot{y}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \cos \log\left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}}\right) + \sin \log\left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}}\right) \right], \quad \dot{z}(s) \equiv 0,$$

e le prime due componenti del vettore  $k\mathbf{n} = \ddot{\mathbf{t}} = \ddot{\alpha}(s)$ :

$$\ddot{x}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}(s - \sqrt{2})} \left[ \cos \log\left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}}\right) + \sin \log\left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}}\right) \right], \quad \ddot{y}(s) = \frac{1}{\sqrt{2}(s - \sqrt{2})} \left[ \cos \log\left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}}\right) - \sin \log\left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}}\right) \right]$$

Ne segue

$$k(s) = \|\ddot{\alpha}(s)\| = \frac{1}{\sqrt{2-s}}$$

che per cambiamento di variabile  $s(t) = \sqrt{2}(1 - e^{-t})$  fornisce nuovamente  $k(t) = \frac{e^t}{\sqrt{2}}$ .

# Versore binormale

Sia  $\alpha$  una curva differenziabile regolare di  $\mathbb{R}^3$  e supponiamo che la curvatura  $k$  di  $\alpha$  sia ovunque non nulla. È del tutto naturale completare la coppia di vettori ortonormali  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{n}$ , rispettivamente campo di versori tangenti e normali alla curva, con il loro prodotto vettoriale

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n},$$

in ogni punto **versore binormale**.

Ricordiamo che la curvatura, velocità di variazione della retta tangente, e dunque del versore tangente

$$k(s) = \|\dot{\mathbf{t}}\| = \left\| \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right\|,$$

misura quanto velocemente la curva si discosta dalla sua retta tangente.

**Definizione.** La terna ortonormale orientata  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  si dice *triedro mobile* o *triedro di Frenet* della curva. A differenza della base canonica "fissa" di  $\mathbb{R}^3$ , esso è un riferimento adattato e variabile sulla curva. Vedremo poi una notevole applicazione nel cosiddetto Teorema di rigidità.

## Torsione in valore assoluto

Per una curva differenziabile regolare di  $\mathbb{R}^3$ , appare naturale introdurre una seconda funzione  $\tau(s)$ , che misura quanto velocemente in ogni punto la curva si discosta dal piano osculatore, ovvero dal non essere piana.

A differenza della curvatura  $k(s)$ , che per definizione è non negativa, la funzione  $\tau(s)$ , detta **torsione** della curva, può anche assumere valori negativi.

La definiamo inizialmente in valore assoluto come

$$|\tau(s)| = \|\dot{\mathbf{b}}\| = \left\| \frac{d\mathbf{b}}{ds} \right\|,$$

dunque come velocità di variazione del versore binormale, ovunque perpendicolare al piano osculatore, che - lo ricordiamo - è generato dai due versori tangente  $\mathbf{t}$  e normale  $\mathbf{n}$ .

La torsione è dunque velocità di variazione, lungo la curva, del piano osculatore; analogamente alla curvatura, che lo è della retta tangente.

# Terza formula di Frenet

**Proposizione.** Il vettore  $\dot{\mathbf{b}}$  è parallelo al versore normale  $\mathbf{n}$ .

Dimostrazione. Le identità  $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle \equiv 1$  e  $\langle \mathbf{b}, \mathbf{t} \rangle \equiv 0$ , derivate rispetto all'ascissa curvilinea  $s$  forniscono:

$$2 \langle \dot{\mathbf{b}}, \mathbf{b} \rangle = 0, \quad \langle \dot{\mathbf{b}}, \mathbf{t} \rangle + \langle \mathbf{b}, \dot{\mathbf{t}} \rangle = 0.$$

Dall'ultima uguaglianza segue  $\langle \dot{\mathbf{b}}, \mathbf{t} \rangle = -\langle \mathbf{b}, \dot{\mathbf{t}} \rangle = -\langle \mathbf{b}, k\mathbf{n} \rangle = 0$ . Dunque il vettore  $\dot{\mathbf{b}}$  risulta perpendicolare sia a  $\mathbf{b}$  che a  $\mathbf{t}$ , e dunque è necessariamente parallelo a  $\mathbf{n}$ .

Avendo definito la torsione in valore assoluto come  $|\tau(s)| = \|\dot{\mathbf{b}}\| = \left\| \frac{d\mathbf{b}}{ds} \right\|$  possiamo dunque porre

$$\dot{\mathbf{b}} = -\tau(s)\mathbf{n},$$

definendo in tal modo la *torsione con il segno*.

Le due formule

$$\dot{\mathbf{t}} = k(s)\mathbf{n} \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{b}} = -\tau(s)\mathbf{n},$$

che definiscono rispettivamente le funzioni  $k(s)$  di curvatura e  $\tau(s)$  di torsione, si dicono rispettivamente *prima* e *terza formula di Frenet*.

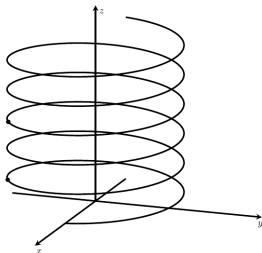
Elica con parametri  $t$  e  $s$ 

Figura 2

Nel file "Curve in  $\mathbb{R}^3$ .pdf" abbiamo visto le equazioni dell' elica

$$\alpha(t) : \quad x = r \cos t, \quad y = r \sin t, \quad z = ht \quad (r > 0, h \in \mathbb{R})$$

con vettore tangente  $\alpha'(t) = (-r \sin t, r \cos t, h)$ , e la riparametrizzazione con l'ascissa curvilinea  $s(t) = \int_0^t \sqrt{r^2 + h^2} d\tau = (\sqrt{r^2 + h^2}) t$

$$\alpha(s) : \quad x(s) = r \cos \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}}, \quad y(s) = r \sin \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}}, \quad z(s) = h \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}}.$$

# Curvatura e torsione dell'elica

Siamo ora in grado di calcolare l'*apparato di Frenet* dell'elica, ovvero la terna ortonormale mobile  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  e la coppia di funzioni  $(k(s), \tau(s))$ .

$$\mathbf{t} = \dot{\alpha}(s) : \quad t_x = \dot{x}(s) = -\frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}, \quad t_y = \dot{y}(s) = \frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}, \quad t_z = \dot{z}(s) = \frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}}$$

$$k\mathbf{n} = \ddot{\alpha}(s) : \quad \ddot{x}(s) = -\frac{r}{r^2+h^2} \cos \frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}, \quad \ddot{y}(s) = -\frac{r}{r^2+h^2} \sin \frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}, \quad \ddot{z}(s) = 0.$$

$$\mathbf{n} : \quad n_x = -\cos \frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}, \quad n_y = -\sin \frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}, \quad n_z = 0.$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{n} : \quad b_x = \frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}, \quad b_y = -\frac{h}{\sqrt{r^2+h^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}, \quad b_z = \frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}}.$$

$$\dot{\mathbf{b}} = \mathbf{t} \wedge \dot{\mathbf{n}} : \quad \dot{b}_x = \frac{h}{r^2+h^2} \cos \frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}, \quad \dot{b}_y = \frac{h}{r^2+h^2} \sin \frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}, \quad \dot{b}_z = 0$$

Dalle formule di Frenet  $\dot{\mathbf{t}} = k(s)\mathbf{n}$  e  $\dot{\mathbf{b}} = -\tau(s)\mathbf{n}$ , abbiamo curvatura e torsione dell'elica

$$k(s) = \frac{r}{r^2 + h^2}, \quad \tau(s) = \frac{h}{r^2 + h^2}.$$

che osserviamo essere entrambi costanti. Infine, se  $h = 0$  (e allora l'elica è una circonferenza di raggio  $r$ ), risulta  $k = \frac{1}{r}$  e  $\tau = 0$ .



## In alternativa...

Naturalmente avremmo potuto calcolare la curvatura dell'elica con il parametro  $t$  iniziale (senza ascissa curvilinea) utilizzando la seguente bellissima formula già dimostrata.

**Proposizione.** Per una curva  $\alpha(t)$  di  $\mathbb{R}^3$  risulta

$$k(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

Con questa formula avremmo riottenuto per l'elica lo stesso valore costante  $k = \frac{r}{r^2+h^2}$  (si può anche fare, per esercizio ...).

Dimostreremo tra poco un'analogia e altrettanto bella formula che fornisce la torsione  $\tau(t)$  a partire da un parametro  $t$  arbitrario.

**Proposizione.** Per una curva  $\alpha(t)$  di  $\mathbb{R}^3$  risulta

$$\tau(t) = \frac{\langle \alpha'(t) \wedge \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2}$$

## Variazione di $\mathbf{n}$

Abbiamo visto, dalla prima e dalla terza formula di Frenet, che tra i tre versori  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  del triedro mobile, sia  $\mathbf{t}$  che  $\mathbf{b}$  variano in direzione di  $\mathbf{n}$ : Precisamente:

$$\dot{\mathbf{t}} = k\mathbf{n}, \quad \dot{\mathbf{b}} = -\tau\mathbf{n}.$$

Vogliamo ora capire come varia  $\mathbf{n}$ , determinando  $\dot{\mathbf{n}}$ .

**Proposizione** (seconda formula di Frenet). Risulta:

$$\dot{\mathbf{n}} = -k\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}.$$

Dimostrazione. Da  $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle \equiv 0$ , abbiamo per derivazione che  $\dot{\mathbf{n}}$  è perpendicolare a  $\mathbf{n}$ , e dunque appartiene al piano di  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{b}$ . Determiniamo le componenti di  $\dot{\mathbf{n}}$ , secondo questi due versori. A tale scopo calcoliamo  $\langle \dot{\mathbf{n}}, \mathbf{t} \rangle$  e  $\langle \dot{\mathbf{n}}, \mathbf{b} \rangle$ .

La somma  $\langle \dot{\mathbf{n}}, \mathbf{t} \rangle + \langle \mathbf{n}, \dot{\mathbf{t}} \rangle$  è zero, in quanto derivata di  $\langle \mathbf{n}, \mathbf{t} \rangle \equiv 0$ . Dunque:

$$\langle \dot{\mathbf{n}}, \mathbf{t} \rangle = -\langle \mathbf{n}, \dot{\mathbf{t}} \rangle = -\langle \mathbf{n}, k\mathbf{n} \rangle = -k.$$

Similmente

$$\langle \dot{\mathbf{n}}, \mathbf{b} \rangle = -\langle \mathbf{n}, \dot{\mathbf{b}} \rangle = -\langle \mathbf{n}, -\tau\mathbf{n} \rangle = \tau.$$

Ne segue la formula.

# Dimostrazione

Dimostriamo ora la formula in cornice (due slides precedenti) per la torsione con parametro  $t$ .

$$\alpha'(t) = \dot{\alpha} s'(t), \quad \alpha''(t) = \ddot{\alpha} s'(t)^2 + \dot{\alpha} s''(t), \quad \alpha'''(t) = \ddot{\alpha} s'(t)^3 + 3\dot{\alpha} s'(t)s''(t) + \dot{\alpha} s'''(t).$$

Ne segue  $\alpha' \wedge \alpha'' = (\dot{\alpha} \wedge \ddot{\alpha}) s'(t)^3 = (\mathbf{t} \wedge k\mathbf{n}) s'(t)^3 = k \mathbf{b} s'(t)^3$ , e

$$\langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha''' \rangle = k s'(t)^3 \langle \mathbf{b}, \alpha''' \rangle = k s'(t)^6 \langle \mathbf{b}, \ddot{\alpha} \rangle.$$

D'altra parte  $\ddot{\alpha} = \frac{d\dot{\alpha}}{ds} = \frac{d(k\mathbf{n})}{ds} = \dot{k}\mathbf{n} + k\dot{\mathbf{n}}$ . Dunque, utilizzando la seconda formula di Frenet:

$$\langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha''' \rangle = k s'(t)^6 \langle \mathbf{b}, \ddot{\alpha} \rangle = k^2 \tau s'(t)^6 \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = k^2 \tau s'(t)^6.$$

Non resta che ricordare che  $s'(t) = \|\alpha'(t)\|$  e che per la formula in cornice per la curvatura risulta  $k^2 = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2}{\|\alpha'(t)\|^6}$ . Ne segue

$$\langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha''' \rangle = k^2 \tau s'(t)^6 = \|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2 \tau,$$

e la formula per la torsione è dimostrata.

# Utilizzo formula

Usiamo ora la formula in cornice per riottenere la torsione dell'elica con parametro  $t$ :

$$\alpha(t) : (r \cos t, r \sin t, ht) \quad (r > 0, h \in \mathbb{R}).$$

Derivando:

$$\alpha'(t) : (-r \sin t, r \cos t, h), \quad \alpha''(t) : (-r \cos t, -r \sin t, 0), \quad \alpha'''(t) : (r \sin t, -r \cos t, 0),$$

e dunque

$$\begin{aligned} \alpha' \wedge \alpha'' &: (rh \sin t, -rh \cos t, r^2), & \|\alpha' \wedge \alpha''\|^2 &= r^2(r^2 + h^2), \\ & \langle \alpha' \wedge \alpha'', \alpha''' \rangle &= r^2 h. \end{aligned}$$

La formula della torsione fornisce il valore costante della torsione, già trovato con l'uso dell'ascissa curvilinea:

$$\tau = \frac{\langle \alpha'(t) \wedge \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2} = \frac{r^2 h}{r^2(r^2 + h^2)} = \frac{h}{r^2 + h^2}.$$

# Una matrice antisimmetrica

Scrivendo insieme le tre formule di Frenet

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{t}} = & kn \\ \dot{\mathbf{n}} = & -k\mathbf{t} & \tau\mathbf{b} \\ \dot{\mathbf{b}} = & & -\tau\mathbf{n} \end{cases}$$

vediamo che l'operatore di derivazione rispetto all'ascissa curvilinea  $s$  di una curva si rappresenta, nella base mobile di  $\mathbb{R}^3$  data dal triedro di Frenet, mediante la matrice antisimmetrica

$$\begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

i cui elementi non nulli sono la curvatura e la torsione della curva.

## Sistema completo di invarianti

Attraverso successive derivazioni della curva parametrizzata  $\alpha$ , ovvero attraverso i vettori  $\alpha'$ ,  $\alpha''$ ,  $\alpha'''$  abbiamo introdotto le significative funzioni di curvatura e di torsione:

$$k = k(t), \quad \tau = \tau(t).$$

Disponiamo di utilissime formule (riportate in cornice in una delle slides precedenti), che consentono di calcolare  $k(t)$  e  $\tau(t)$  a partire da un parametro arbitrario.

Abbiamo anche visto che, parametrizzando con un'ascissa curvilinea  $s$ , otteniamo le funzioni  $k = k(s)$  e  $\tau = \tau(s)$  dalla prima e terza formula di Frenet. Anche qui ci siamo fermati alla derivata seconda per la curvatura, e alla derivata terza per la torsione. In particolare

$$k(s) = \|\dot{\mathbf{t}}(s)\|, \quad |\tau(s)| = \|\dot{\mathbf{b}}(s)\|.$$

Potremmo dunque continuare con derivate quarte, quinte, seste,  $\dots$ , pensando così di ottenere invarianti sempre più raffinati della curva in esame. Il teorema che segue dice, tra le altre cose, che ha assolutamente senso fermarsi a curvatura e torsione, che costituiscono un **sistema completo di invarianti** per la geometria estrinseca delle curve di  $\mathbb{R}^3$ .

# Enunciato

## Teorema fondamentale della teoria locale delle curve

(Teorema di rigidità)

**Teorema.** Siano  $k(s)$  e  $\tau(s)$  funzioni  $\mathcal{C}^\infty$  definite in un intervallo  $I \subset \mathbb{R}$  con  $k(s) > 0$ . Allora esiste, ed è unica a meno di isometrie dirette di  $\mathbb{R}^3$ , una curva  $\alpha(s)$  per la quale  $s$  sia un'ascissa curvilinea e tale che  $k(s)$  e  $\tau(s)$  siano le funzioni di curvatura e di torsione.

La dimostrazione, che sarà esposta nelle prossime slides, è un'applicazione del teorema di esistenza e unicità delle soluzioni per sistemi di equazioni differenziali ordinarie. Il sistema di equazioni differenziali è dato dalle formule di Frenet, nelle quali le funzioni assegnate  $k = k(s)$  e  $\tau = \tau(s)$  sono a coefficiente. Date condizioni iniziali (riferimento di Frenet iniziale), si ha un'unica soluzione  $\mathbf{t} = \mathbf{t}(s)$ ,  $\mathbf{n} = \mathbf{n}(s)$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{b}(s)$ , e per integrazione di  $\mathbf{t} = \mathbf{t}(s)$  si ha la parametrizzazione  $\alpha(s)$  della curva.

# Inizio dimostrazione

Il sistema delle formule di Frenet

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{t}} = & kn \\ \dot{\mathbf{n}} = & -k\mathbf{t} & \tau\mathbf{b} \\ \dot{\mathbf{b}} = & & -\tau\mathbf{n} \end{cases}$$

è un sistema di nove equazioni differenziali lineari nelle incognite  $(t_x, t_y, t_z, n_x, n_y, n_z, b_x, b_y, b_z)$ .

Si fissi un riferimento iniziale  $\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0$  in corrispondenza di  $s = s_0$ , e si considerino le funzioni  $C^\infty$  assegnate  $k = k(s) > 0$  e  $\tau = \tau(s)$  e definite sull'intervallo  $I$ .

Possiamo dunque usare il teorema di esistenza e unicità delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali e la proprietà di estendibilità delle soluzioni per sistemi di equazioni lineari (cfr. p. es. Appunti del Prof. G. Crasta sulle equazioni differenziali ordinarie, scaricabili sulla pagina web del corso di Analisi I della Prof.ssa F. Leoni).

Ne segue che esistono funzioni vettoriali  $\mathbf{t} = \mathbf{t}(s), \mathbf{n} = \mathbf{n}(s), \mathbf{b} = \mathbf{b}(s)$ , definite su tutto l'intervallo  $I$ , e che sono soluzioni del sistema stesso.

Con le condizioni iniziali  $\mathbf{t}_0 = \mathbf{t}(s_0), \mathbf{n}_0 = \mathbf{n}(s_0), \mathbf{b}_0 = \mathbf{b}(s_0)$ , tali soluzioni sono uniche.

Verifichiamo ora che la terna  $\mathbf{t} = \mathbf{t}(s), \mathbf{n} = \mathbf{n}(s), \mathbf{b} = \mathbf{b}(s)$  si mantiene ortonormale per ogni  $s \in I$ . Ciò può vedersi considerando le seguenti sei funzioni  $f_1 = \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}(s) \rangle$ ,  $f_2 = \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle$ ,  $f_3 = \langle \mathbf{b}(s), \mathbf{b}(s) \rangle$ ,  $f_4 = \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s) \rangle$ ,  $f_5 = \langle \mathbf{t}(s), \mathbf{b}(s) \rangle$ ,  $f_6 = \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s) \rangle$ , e derivandole rispetto a  $s$ .



# Dimostrazione (continuazione)

Infatti, se deriviamo rispetto a  $s$  le sei funzioni  $f_1, f_2, \dots, f_6$  date dai prodotti scalari tra i vettori  $\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)$ , soluzioni del sistema di equazioni differenziali considerato, otteniamo dei prodotti scalari in cui appaiono come fattori sia le funzioni stesse  $\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)$  che le loro derivate  $\dot{\mathbf{t}}(s), \dot{\mathbf{n}}(s), \dot{\mathbf{b}}(s)$ .

Ma quest'ultime sono necessariamente uguali ai secondi membri delle formule di Frenet stesse. Otteniamo in questo modo un altro sistema di equazioni differenziali ordinarie, questa volta nelle incognite  $f_1, f_2, \dots, f_6$  e di nuovo lineari nelle funzioni incognite. La condizione iniziale che ora abbiamo è che la terna di Frenet iniziale  $\mathbf{t}_0 = \mathbf{t}(s_0), \mathbf{n}_0 = \mathbf{n}(s_0), \mathbf{b}_0 = \mathbf{b}(s_0)$  sia ortonormale, ovvero che  $f_1(s_0) = f_2(s_0) = f_3(s_0) = 1$  e  $f_4(s_0) = f_5(s_0) = f_6(s_0) = 0$ .

Ne segue che i valori costanti  $1, 1, 1, 0, 0, 0$  delle sei funzioni incognite  $f_1, f_2, \dots, f_6$  sono l'unica soluzione del sistema, compatibile con la condizione iniziale. Pertanto la terna  $\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)$  rimane ortonormale su tutto l'intervallo  $I$ .

Possiamo ora definire

$$\alpha(s) = \int_{s_0}^s \mathbf{t}(\tau) d\tau$$

come unica curva con triedro iniziale assegnato  $\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0, \mathbf{b}_0$  e passante per un punto  $P_0 \in \mathbb{R}^3$  iniziale assegnato. Poiché le isometrie dirette di  $\mathbb{R}^3$  agiscono transitivamente sulle terne ortonormali orientate e applicate ad un punto, il teorema è dimostrato.

# Un esercizio e un commento

**Esercizio.** Abbiamo visto che l'elica  $x(s) = r \cos \frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}$ ,  $y(s) = r \sin \frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}$ ,  $z(s) = h$  ha curvatura e torsione costanti  $k(s) = \frac{r}{r^2+h^2}$  e  $\tau(s) = \frac{h}{r^2+h^2}$ . Dal teorema di rigidità segue che, a meno di isometrie dirette di  $\mathbb{R}^3$ , le eliche sono le uniche curve con  $k$  e  $\tau$  costanti. Assegnati due numeri reali  $k > 0$  e  $\tau$ , determinarne altri due  $r > 0$  e  $h$  tali che l'elica  $x(s) = r \cos \frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}$ ,  $y(s) = r \sin \frac{s}{\sqrt{r^2+h^2}}$ ,  $z(s) = h$  abbia  $k$  e  $\tau$  come curvatura e torsione.

In conclusione possiamo dire che la geometria differenziale delle curve presenta i due aspetti.

- **Geometria intrinseca.** Consiste della geometria visibile ad un "abitante" della curva, che non può vedere fuori di essa. Può muoversi, e misurare lunghezze, usando l'ascissa curvilinea. Non può rendersi conto se la sua curva è una retta, e del resto le curve differenziabili sono *rettificabili*. Brutalmente, possiamo dunque dire che la geometria intrinseca delle curve differenziabili non esiste, poiché ogni curva è (isometrica a) una retta.
- **Geometria estrinseca.** Consiste della geometria delle curve contenute nell'ambiente  $\mathbb{R}^3$ . La curvatura e la torsione sono invarianti estrinseci, e anzi per il teorema di rigidità ogni altro invariante estrinsecico risulta deducibile da essi.

Con le prossime slides, passeremo alla superfici differenziabili di  $\mathbb{R}^3$ . Vedremo che in tale contesto entrambe le geometrie intrinseca e estrinseca risultano essere di grande consistenza.