Alcune topologie su $\mathbb{R}$

P. Piccinni

Corso di Geometria II (A-L), a.a. 2019-20
Laurea Triennale in Matematica
Sapienza Università di Roma Classroom - codice 24bsdao

Lezione del 5 marzo 2020, durata 2 ore

Definizione della topologia euclidea $\mathcal{E}$

La *topologia euclidea* $\mathcal{E}$ su $\mathbb{R}$ è implicitamente usata nella matematica fin dall'antichità, e molto più esplicitamente a partire dall'età moderna nel Calcolo e nell'Analisi Matematica.

Nelle lezioni del Prof. Zimmermann essa è chiamata *topologia standard*.

Si può affermare che essa sia la più importante topologia su $\mathbb{R}$.

$\mathcal{E}$ è definita dalla distanza euclidea $d(x, y) = |x - y|$ su $\mathbb{R}$.

Si ricordi a questo riguardo che su $\mathbb{R}$ tutte le distanze in $\mathbb{R}^n$

$$d_p((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots y_n)) = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \Big)^{\frac{1}{p}}$$

per $p \geq 1$ (e anche $d_\infty = \max |x_i - y_i|$) coincidono.

La topologia euclidea $\mathcal{E}$

Lo spazio metrico $(\mathbb{R}, d)$, dove d è la distanza euclidea, è detto *retta euclidea*. Per definizione, la topologia euclidea $\mathcal{E}$ ha per base gli intervalli aperti (a, b), che sono evidentemente i dischi aperti di $(\mathbb{R}, d)$:

$$(a, b) = D_r(x), \text{ con raggio } r = \frac{b-a}{2} \text{ e centro } x = \frac{a+b}{2}$$

Vale la pena di segnalare che gli intervalli aperti (a, b) non esauriscono la classe degli aperti della retta euclidea.

Sono, aperti p. es. le unioni di due o più intervalli aperti disgiunti, gli intervalli aperti illimitati $(a, +\infty)$, e $(-\infty, b)$, il complementare $\mathbb{R} - \mathbb{Z}, \ldots$.

Non sono invece aperti gli intervalli $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$, un singolo punto, i sottoinsiemi $\mathbb{Z}$ degli interi e $\mathbb{Q}$ dei razionali, ...

Alcuni di questi ultimi sono chiusi (Quali?). Altri non sono né aperti né chiusi.

I razionali $\mathbb{Q}$ e la loro chiusura

Ricordiamo che l'insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali è numerabile.

D'altra parte $\mathbb{Q}$ è *denso* nella retta euclidea. Ciò significa che la *chiusura* $\overline{\mathbb{Q}}$ di $\mathbb{Q}$ è tutto $\mathbb{R}$.

Ricordiamo ora la definizione di chiusura $\overline{S}$ di un sottoinsieme S di uno spazio topologico X.

Definizione. La *chiusura*

$$\overline{S} = \bigcap_{F_i \supset S} F_i$$

di S è per definizione l'intersezione di tutti i chiusi F_i di X contenenti S. Dunque $\overline{S}$, intersezione di chiusi, è un chiuso e anzi è "il più piccolo chiuso contenente S".

Proprietà di separabilità della topologia $\mathcal{E}$

Esercizio. Riconoscere che la chiusura $\overline{S}$ consiste di tutti e soli i punti $x \in X$ *aderenti a* S, ovvero tali che tali che ogni intorno U_x di x ha intersezione non vuota con S: $U_x \cap S \neq \emptyset$.

Dunque la retta euclidea $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ ammette un sottoinsieme $S = \mathbb{Q}$ in esso denso e numerabile.

Definizione. Uno spazio topologico (X, τ) si dice *separabile* se esiste un sottoinsieme numerabile $S \subset X$ tale che

$$\overline{S} = X.$$

Dunque $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ è uno spazio topologico separabile.

Base numerabile di $\mathcal{E}$

Una conseguenza del fatto che i razionali $\mathbb{Q}$ sono densi nella retta euclidea - e dunque $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ è separabile - è che i soli intervalli aperti (a, b) dove a, b sono numeri razionali costituiscono una base della topologia $\mathcal{E}$. E' questa dunque una base numerabile e questo fatto si esprime dicendo che $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ è *a base numerabile* o che soddisfa il *secondo assioma di numerabilità*.

In generale si dice che uno spazio topologico (X, τ) soddisfa il *primo assioma di numerabilità* se ogni $x \in X$ ha una base $\mathcal{U}(x)$ di intorni numerabile. Si dice invece che (X, τ) soddisfa il *secondo assioma di numerabilità* se ogni X ha una base $\mathcal{B}$ di aperti numerabile.

Implicazioni: Secondo num. $\Rightarrow$ Primo num. Metrico separabile $\Rightarrow$ Secondo num.

Si noti che secondo numerabile $\Rightarrow$ primo numerabile. Infatti data la base $\mathcal{B}$ numerabile, basta porre, per ogni $x \in X$,

$$\mathcal{U}(x) = \{B \in \mathcal{B},\ x \in B\}.$$

Il viceversa non vale: p.es. $\mathbb{R}$ con la topologia discreta (o qualunque spazio metrico (X, d) che non sia finito o numerabile) è primo numerabile ma non secondo numerabile: si usino, per la base dei dischi, i raggi $r = 2^{-n}$ nel caso dello spazio metrico (X, d).

Proposizione: (X, d) metrico separabile $\Rightarrow$ (X, d) secondo numerabile.

Dim: Sia $E \subset X$ un sottoinsieme denso numerabile. Allora i dischi $D_r(x)$ con $x \in E$, $r = 2^{-n}$ costituiscono una base numerabile di X.

Definizione della topologia di Sorgenfrey j_d

Anche la topologia di Sorgenfrey j_d, come la *topologia euclidea* $\mathcal{E}$, è definita su $\mathbb{R}$ mediante una base.

Nelle lezioni del Prof. Zimmermann essa è chiamata *lower limit topology*.

Una base di j_d è data dagli intervalli $[a, b) \subset \mathbb{R}$.

Vedremo tuttavia che tale topologia non è metrizzabile, ovvero non può essere definita da una distanza.

Si riconosce infatti che la collezione

$$\mathcal{B} = \{[a, b)\}$$

degli intervalli chiusi a sinistra e aperti a destra soddisfa le seguenti proprietà B1 e B2 caratteristiche delle basi di una topologia.

Verifiche:

B1) $\mathbb{R} = \bigcup_{a<b}[a,b)$
B2) Se $[a,b) \cap [c,d) \neq \emptyset$, l'intersezione è una delle seguenti:

$$[c,b), [a,d), [a,b), [c,d).$$

Dunque l'intersezione di due elementi di $\mathcal{B}$ è un elemento di $\mathcal{B}$. Ciò è sufficiente per concludere che $\mathcal{B}$ è base di una topologia j_d, di Sorgenfrey o del "lower limit".

Esercizio. Cercare di capire perché j_d si chiama *lower limit topology*. Sapresti p. es. dire se la successione $\{\frac{1}{n}\}$ ha un limite nella topologia j_d? E la successione $\{1 - \frac{1}{n}\}$, sempre nella topologia j_d?

Più fine e meno fine

Tra le topologie su un insieme X può essere introdotta la seguente relazione d'ordine parziale.

Siano τ_1 e τ_2 due topologie sullo stesso insieme X. τ_1 si dice *meno fine* di τ_2 , e si scrive

$$\tau_1 < \tau_2$$

se ogni aperto della topologia τ_1 è anche aperto nella topologia τ_2:

$$A \in \tau_1 \Rightarrow A \in \tau_2.$$

Proposizione. Risulta:

$$\mathcal{E} < j_d.$$

Dim. È sufficiente osservare che per ogni $a < b$ si ha:

$$(a, b) = \bigcup_{a<c<b} [c, b).$$

Proprietà di j_d

Teorema. $(\mathbb{R}, j_d)$ è primo numerabile, ma non secondo numerabile, e non è metrizzabile.

Dim. Per riconoscere che $(\mathbb{R}, j_d)$ è primo numerabile, si osservi che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, la famiglia numerabile

$$\mathcal{U}(x) = \{[x, x + 2^{-n})\}_{n \in \mathbb{N}}$$

è una base di intorni. Vedremo tra poco che $(\mathbb{R}, j_d)$ non ammette una base numerabile. Poiché il sottoinsieme $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ è denso anche nella topologia j_d (e dunque $(\mathbb{R}, j_d)$ è separabile), dalla Proposizione nella precedente slide "Implicazioni ...", ne seguirà che $(\mathbb{R}, j_d)$ non è metrizzabile.

Per assurdo, supponiamo che esista una base numerabile $\mathcal{B}$ di j_d e consideriamo per ogni $a \in \mathbb{R}$ l'aperto $[a, +\infty) \in j_d$. Dunque deve esistere un $B_a \in \mathcal{B}$ tale che $a \in B_a \subset [a, +\infty)$. Se $a < b$, il corrispondente $B_b \in \mathcal{B}$ è tale che $B_b \subset [b, +\infty)$. Dunque $a \notin B_b$. Si ottiene dunque un'applicazione iniettiva $\mathbb{R} \to \mathcal{B}$, definita cosí: $a \in \mathbb{R} \to B_a \in \mathcal{B}$. Ciò contraddice l'ipotesi che $\mathcal{B}$ sia numerabile.

L'upper limit topology j_s

In modo del tutto simmetrico, possiamo considerare su $\mathbb{R}$ anche l'*upper limit topology* j_s, una cui base è costituita dalla famiglia degli intervalli

$$\mathcal{B} = \{(a, b]\}$$

Tutte le proprietà viste per j_d valgono anche per j_s. In particolare anche j_s è più fine della topologia $\mathcal{E}$ (mentre non è confrontabile con j_d).

Inoltre j_s è primo numerabile e separabile, ma non secondo numerabile. Pertanto j_s non è metrizzabile.

Esercizio. Cercare di capire perché j_s si chiama upper limit topology.

Banale e discreta

Come su qualunque insieme, anche su $\mathbb{R}$ si possono considerare le seguenti *topologia banale* e *topologia discreta*:

$$\tau_{ban} = \{\emptyset, \mathbb{R}\}, \qquad \tau_{discr} = \{\text{tutti i sottoinsiemi di } \mathbb{R}\},$$

rispettivamente la meno fine e la più fine di tutte le topologie.

τ_{discr} è metrizzabile, ed è indotta dalla distanza discreta $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$, e $d(x, y) = 0$ se $x = y$.

τ_{ban} invece non è metrizzabile, e vediamo subito perché.

Loro proprietà

Per dimostrare che $(\mathbb{R}, \tau_{ban})$ non è metrizzabile, ricordiamo la seguente:

Definizione. Uno spazio topologico (X, τ) si dice *di Hausdoff* se, per ogni $x \neq y \in X$, esistono aperti A_x, A_y contenenti rispettivamente x e y e disgiunti: $A_x \cap A_y = \emptyset$.

Esercizio Usando la disuguaglianza triangolare per la distanza d dimostrare che ogni spazio metrico (X, d) è di Hausdorff.

Poiché l'unico aperto non vuoto in $(\mathbb{R}, \tau_{ban})$ è tutto $\mathbb{R}$, è chiaro che $(\mathbb{R}, \tau_{ban})$ non è uno spazio di Hausdorff, e dunque non è metrizzabile.

i_d e i_s

Su $\mathbb{R}$ abbiamo poi le seguenti *topologia della semicontinuità inferiore* e *topologia della semicontinuità superiore*:

$$i_d = \{(a, +\infty)\}_{a \in \mathbb{R}}, \qquad i_s = \{(-\infty, b)\}_{b \in \mathbb{R}},$$

dette anche rispettivamente topologia degli intervalli aperti illimitati a destra e topologia degli intervalli aperti illimitati a sinistra.
È semplicissmo verificare che, in entrambi i casi, sono verificate le proprietà A1, A2, A3 che caratterizzano gli aperti di una topologia.

Esercizio. Confrontare (ovvero stabilire se sono confrontabili e in caso affermativo dire quale è più fine) le topologie i_d con i_s e ognuna di loro con la topologia euclidea $\mathcal{E}$.

Esercizio. Stabilire se $(\mathbb{R}, i_d)$ $(\mathbb{R}, i_s)$ sono di Hausdoff e se sono metrizzabili.

Ancora un esercizio

Esercizio. Si consideri una funzione

$$f : (\mathbb{R}, \mathcal{E}) \to (\mathbb{R}, i_d) \quad \text{oppure} \quad f : (\mathbb{R}, \mathcal{E}) \to (\mathbb{R}, i_s),$$

e si guardi alla definizione di applicazione continua tra spazi topologici. Se si preferisce si guardi alla definizione (tramite intorni) di applicazione continua in un punto $x \in \mathbb{R}$.

Cercare di capire perché i_d con i_s si chiamano rispettivamente topologia della semicontinuità inferiore e topologia della semicontinuità superiore.

Altre due topologie

Per lo studio della topologia cofinita o di Zariski $\mathcal{Z}$ su $\mathbb{R}$ si rimanda agli appunti scritti dal Prof. Bravi.

Segnaliamo ancora la topologia

$$k = \{(-a, a)\}_{a>0}$$

degli intervalli aperti centrati in 0. Verificate che valgono le proprietà A1,A2,A3 caratteristiche degli aperti.

Esercizio. Confrontare (ovvero stabilire se sono confrontabili e in caso affermativo dire quale è più fine) le topologie $\mathcal{Z}$ e k, e ognuna di loro con la topologie precedenti $\mathcal{E}, i_d, i_s$.

Esercizio. Stabilire se $(\mathbb{R}, \mathcal{Z})$ $(\mathbb{R}, k)$ sono di Hausdoff e se sono metrizzabili.