Esonero di Geometria II, a.a. 2016-17 - Prof. P. Piccinni - 21 aprile 2016

a. Scrivere subito Matricola (obbligatoria), Cognome e Nome.
b. Utilizzare questi fogli per le risposte. I fogli protocollo sono invece per riflessioni o calcoli, e non vanno consegnati.
c. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Tempo a disposizione: 2 ore esatte

Matricola............................**Cognome**...**Nome**..

1. Sia $\mathcal{B} = \{B_i,\, i \in I\}$ una base per una topologia su X. Si consideri la seguente famiglia di sottoinsiemi di X:

$$\mathcal{F} = \{\complement_X B_i,\, B_i \in \mathcal{B}\}.$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono corrette (anche più risposte):

$\boxed{\bowtie 1}$ L'intersezione di tutti gli elementi di $\mathcal{F}$ è necessariamente vuota
$\boxed{2}$ L'intersezione di tutti gli elementi di $\mathcal{F}$ è necessariamente non vuota
$\boxed{\bowtie 3}$ Se $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ e se $x \in F_1 \cup F_2,$ allora esiste un $F \in \mathcal{F}$ con $x \in F,\ F \subset F_1 \cup F_2$
$\boxed{\bowtie 4}$ Se $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ e se $x \notin F_1 \cup F_2,$ allora esiste un $F \in \mathcal{F}$ con $x \notin F,\ F_1 \cup F_2 \subset F$
$\boxed{\bowtie 5}$ L'unione di tutti gli elementi di $\mathcal{F}$ è necessariamente X
$\boxed{6}$ Nessuna delle precedenti

2. Si consideri la topologia cofinita $\mathcal{Z}$ in $\mathbb{R}$ (i chiusi sono i sottoinsiemi finiti), e la successione

$$a = \{a_n\} = \begin{cases} a_n = 0 & \text{se} \quad n \quad \text{è dispari} \\ a_n = n & \text{se} \quad n \quad \text{è pari} \end{cases} \quad .$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{\bowtie 1}$ la successione a converge a zero
$\boxed{\bowtie 2}$ la successione a converge a zero e solo a zero
$\boxed{3}$ la successione a non converge ad alcun numero reale
$\boxed{4}$ la successione a converge a tutti i numeri reali
$\boxed{5}$ la successione a converge a tutti e soli i numeri naturali pari

3. Si consideri sull'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi relativi la *topologia cofinita* $\mathcal{Z}$, i cui chiusi sono i sottoinsiemi finiti di $\mathbb{Z}$. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\boxed{1}$ $(\mathbb{Z}, \mathcal{Z})$ è di Hausdorff
$\boxed{\bowtie 2}$ $(\mathbb{Z}, \mathcal{Z})$ è compatto
$\boxed{\bowtie 3}$ $(\mathbb{Z}, \mathcal{Z})$ è connesso
$\boxed{\bowtie 4}$ $\mathcal{Z}$ induce, su ogni sottoinsieme finito $S \subset \mathbb{Z}$, la topologia discreta
$\boxed{5}$ Nessuna delle precedenti

4. Si considerino i seguenti sottospazi dell' $\mathbb{R}^2$ euclideo:

$X_1 =$ unione di due circonferenze tangenti esternamente, $X_2 =$ unione di due circonferenze tangenti internamente,

$X_3 =$ unione di due circonferenze secanti, $X_4 =$ unione di due circonferenze distinte e concentriche,

$X_5 =$ unione di una circonferenza e un suo diametro.

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- $\boxed{\bowtie 1}$ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 sono tutti compatti
- $\boxed{2}$ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 sono tutti connessi
- $\boxed{3}$ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 sono tutte varietà topologiche
- $\boxed{4}$ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 sono a due a due non omeomorfi
- $\boxed{5}$ X_3 è omeomorfo a X_5
- $\boxed{\bowtie 6}$ X_1 è omeomorfo a X_2
- $\boxed{7}$ Nessuna delle precedenti

5. Si consideri il sottospazio:

$$X = (a, b) \cup [c, d] \subset \mathbb{R}$$

con la topologia euclidea indotta, essendo $a < b \leq c < d$, e sia

$$f : X \to \mathbb{R} \quad \text{definita da} \quad f(x) = \begin{cases} a & \text{se} \quad x \in (a, b) \\ x & \text{se} \quad x \in [c, d] \end{cases} .$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- $\boxed{1}$ per $b = c$, f è continua
- $\boxed{\bowtie 2}$ per $b < c$, f è continua
- $\boxed{\bowtie 3}$ f porta chiusi in chiusi
- $\boxed{4}$ f porta aperti in aperti
- $\boxed{5}$ Nessuna delle precedenti

6. Si considerino i sottospazi

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| < 1, |y| < 1\} \text{ (quadrato aperto)}, \qquad Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 < 1\} \text{ (disco aperto)},$$

entrambi con la topologia euclidea indotta. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- $\boxed{\bowtie 1}$ Y è un sottoinsieme aperto di X
- $\boxed{\bowtie 2}$ $\overline{Y}$ è un sottoinsieme chiuso di $\overline{X}$
- $\boxed{\bowtie 3}$ $\complement_X Y$ ha quattro componenti connesse e ognuna di esse è un chiuso di X
- $\boxed{4}$ $\complement_X Y$ ha quattro componenti connesse e ognuna di esse è un aperto di X
- $\boxed{5}$ $\complement_{\overline{X}} \overline{Y}$ ha quattro componenti connesse e ognuna di esse è un chiuso di $\overline{X}$
- $\boxed{\bowtie 6}$ $\complement_{\overline{X}} \overline{Y}$ ha quattro componenti connesse e ognuna di esse è un aperto di $\overline{X}$
- $\boxed{7}$ Nessuna delle precedenti

7. Si consideri lo spazio metrico $X = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$, costituito dalle funzioni continue $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, con la distanza

$$d(f, g) = \max_{x \in [-1,1]} \{|f(x) - g(x)|\},$$

e il suo sottospazio

$$S = \{f(x) = kx,\ k \in \mathbb{R}\}.$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

- $\boxed{1}$ S è aperto in X
- $\boxed{2}$ S è limitato
- $\boxed{\bowtie 3}$ S è connesso
- $\boxed{4}$ S è compatto
- $\boxed{5}$ Nessuna delle precedenti

b