Cognome: .... Nome: .... Numero di matricola: ....

Corso di Geometria II, a. a. 2018-19

Prova scritta del 21 giugno 2019

Norme per le prove in itinere e le prove scritte d'esame

1. Scrivere subito cognome, nome e numero di matricola su questo foglio.
2. Consegnate solo i fogli che ritenete essere bella copia.
3. **Svolgere gli esercizi con ordine e completezza, motivando ogni risposta. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza.**
4. Durante non si possono utilizzare calcolatrici o telefoni cellulari.
5. La durata della prova è di **3 ore**. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

1. Si considerino in $\mathbb{R}^2$ con la topologia euclidea, e al variare di $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 1$), le rette

$$L_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ con } x = \frac{1}{n}\}.$$

Sia poi:

$$L = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} L_n \quad \text{e} \quad X = \mathbb{R}^2 - L.$$

i) Si determini parte interna, frontiera, parte esterna e chiusura di X in $\mathbb{R}^2$.
ii) Stabilire se X è di Hausdorff, se è compatto e se è connesso.

2. Si consideri, in $\mathbb{R}^2$ con la topologia euclidea, la relazione definita da

$$(x, y) \sim (x', y') \quad \Leftrightarrow \quad x - x' = y - y'.$$

i) Verificare che $\sim$ è una relazione di equivalenza.

Sia Z il quoziente topologico di $\mathbb{R}^2$ modulo $\sim$, e sia $p : \mathbb{R}^2 \to Z$ la proiezione sul quoziente. Si ricordi che *la saturazione* di un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}^2$ è definita come $p^{-1}(p(A))$.

ii) Descrivere la saturazione $p^{-1}(p(D^2))$, dove D^2 è il disco aperto di centro l'origine e raggio 1.
iii) Costruire un omeomorfismo tra il quoziente Z e $\mathbb{R}$ con la topologia euclidea.

3. Si consideri in $\mathbb{R}^3$ con la topologia euclidea, la sfera unitaria privata dei poli:

$$X = S^2 - \{\text{poli nord e sud}\},$$

e parametrizzata da latitudine φ e longitudine θ, secondo le equazioni (nelle quali si faccia attenzione alle limitazioni dei parametri φ, θ):

$$X : \quad x = \cos\varphi \cos\theta, \;\; y = \cos\varphi \sin\theta, \;\; z = \sin\varphi \qquad \Big(-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad \theta \in [0, 2\pi] \Big).$$

Si osservi che ogni punto $P \in X$ può essere proiettato nel punto $f(P) \in S^1$, intersezione dell'(unico) meridiano per P con l'equatore $S^1 = X \cap \{z = 0\}$. Si ha dunque la "proiezione lungo i meridiani"

$$f : X \longrightarrow S^1 \subset X.$$

i) Costruire un'omotopia $F : X \times I \to X$ dall'applicazione identica $id_X : X \to X$ a $f : X \to X$. Chiarire se l'esistenza di tale F implica che S^1 è retratto di deformazione di X. Lo spazio X è semplicemente connesso?
ii) Costruire un omeomorfismo $g : X \to C$, dove $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \; x^2 + y^2 = 1, \; -1 < z < 1\}$ è la superficie cilindrica (aperta) circoscritta a X.

4. Si consideri l'applicazione $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(u, v) = (u - v, u + v, 2u^2 - v^3),$$

e si osservi che essa definisce la parametrizzazione di una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$.

i) Determinare i coefficienti E, F, G e L, M, N delle due forme fondamentali di S.
ii) Determinare la curvatura gaussiana K dei punti di S, precisando quali punti risultano ellittici, iperbolici e parabolici.