Cognome: .... Nome: .... Numero di matricola: ....

Corso di Geometria II, a. a. 2018-19

Prova scritta del 12 luglio 2019

Norme per le prove in itinere e le prove scritte d'esame

1. Scrivere subito cognome, nome e numero di matricola su questo foglio.
2. Consegnate solo i fogli che ritenete essere bella copia.
3. **Svolgere gli esercizi con ordine e completezza, motivando ogni risposta. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza.**
4. Durante non si possono utilizzare calcolatrici o telefoni cellulari.
5. La durata della prova è di **3 ore**. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

1. Si considerino in $\mathbb{R}^3$, dotato della topologia euclidea, i seguenti sottoinsiemi:

(a) $S_1 = \{(x, y, z)$ tali che $x^4 - y + z - 1 = 0\}$,

(b) $S_2 = \{(x, y, z)$ tali che $x^2 + y^4 - z^3 - 1 = 0\}$,

(c) $S_3 = \{(x, y, z)$ tali che $(x^2 + y^2 - 4)^2 + z^2 - 1 = 0\}$.

i) Stabilire, per ognuno tra S_1, S_2, S_3, se si tratta del grafico di una funzione $z = f(x, y)$ o se si tratta di unioni di tali grafici.

ii) Stabilire per ognuno tra S_1, S_2, S_3 se, con la topologia del sottospazio, si tratta di uno spazio compatto e/o di uno spazio connesso.

2. Si consideri, in $\mathbb{R}^2$ con la topologia euclidea, i sottoinsiemi

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tali che} \quad x \in \mathbb{Z},\ y \notin \mathbb{Z}\},$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{tali che} \quad x \notin \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{Z}\}.$$

i) Determinare chiusure e parti interne di $A, B, A \cup B$.

ii) Stabilire quali tra A, B, $A \cup B$ e i loro complementari $\mathbb{R}^2 - A$, $\mathbb{R}^2 - B$, $\mathbb{R}^2 - (A \cup B)$ sono connessi per archi (motivare le risposte).

iii) Con riferimento alla seguente relazione $\sim$ in $A \cup B$: $(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow x = x' + m,\ y = y' + n,$ con $m, n \in \mathbb{Z}$, stabilire se lo spazio quoziente $(A \cup B)/_\sim$ è di Hausdorff, se è compatto e se è connesso.

3. Si considerino in $\mathbb{R}^2$ con la topologia euclidea i sottospazi:

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |x| + |y| \leq 2\}, \quad F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 1 \leq |x| + |y| \leq 2\}.$$

i) Disegnare E e F.

ii) Stabilire se E e/o F sono connessi e se sono compatti (motivare le risposte).

iii) Stabilire se E e/o F sono contraibili e se E e/o F sono omotopicamente equivalenti a una circonferenza S^1.

4. Si consideri in $\mathbb{R}^3$ la superficie S grafico della funzione $z = x^3 - y^3$.

i) Assumendo $x = u$, $y = v$ come parametri, determinare i coefficienti E, F, G e L, M, N delle due forme fondamentali di S.

ii) Determinare la curvatura gaussiana K dei punti di S, e mostrare che il luogo dei punti parabolici di S (ovvero con curvatura gaussiana $K = 0$) è unione di due curve C_1 e C_2.

iii) Scrivere le equazioni parametriche di C_1 e C_2 e determinare le funzioni di curvatura e di torsione delle due curve.