Cognome: .... Nome: .... Numero di matricola: ....

Corso di Geometria II, a. a. 2018-19

Prova scritta del 4 settembre 2019

Norme per le prove in itinere e le prove scritte d'esame

1. Scrivere subito cognome, nome e numero di matricola su questo foglio.
2. Consegnate solo i fogli che ritenete essere bella copia.
3. **Svolgere gli esercizi con ordine e completezza, motivando ogni risposta. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza.**
4. Durante non si possono utilizzare calcolatrici o telefoni cellulari.
5. La durata della prova è di **3 ore**. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

1. Si considerino i seguenti intervalli in $\mathbb{R}$, dotato della topologia euclidea:

$$I_1 = (0, 1), \qquad I_2 = [0, 1), \qquad I_3 = [0, 1], \qquad I_4 = [0, +\infty), \qquad I_5 = (0, +\infty).$$

(1) Stabilire quali tra I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 sono compatti.

(2) Stabilire quali tra I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 sono omeomorfi tra di loro, esibendo esplicitamente l'omeomorfismo.

(3) Per le coppie di intervalli non omeomorfi tra di loro, dimostrare che un omeomorfismo non può esistere.

2. Si consideri in $\mathbb{R}^n$ con la topologia euclidea.

(1) Sia C un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}^n$. Si può affermare che la sua frontiera $\mathrm{Fr}(C)$ è compatta?

(2) Sia X un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$, e siano $\mathrm{Int}(X)$, $\overline{X}$ rispettivamente il suo interno e la sua chiusura. Può risultare che $\mathrm{Int}(X) = \overline{X}$?.

(3) Sia C un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^n$, e sia $\mathrm{Fr}(C)$ la sua frontiera. Si può affermare che $\mathrm{Fr}(C)$ è compatto?

3. Si considerino in $\mathbb{R}^3$ con la topologia euclidea i sottospazi:

$$X_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 > 0\}, \qquad X_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 = 1\},$$

$$X_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 = 1,\ z = 0\}, \qquad X_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 = 0\}.$$

i) Quali tra X_1, X_2, X_3 e X_4 sono compatti? E connessi? E semplicemente connessi?

ii) Stabilire quali tra X_1, X_2, X_3 e X_4 sono tra di loro omotopicamente equivalenti, esibendo equivalenze omotopiche esplicite laddove queste esistano, oppure dimostrando che queste non possono esistere.

4. Si consideri in $\mathbb{R}^3$ la superficie S parametrizzata da

$$\sigma(u, v) = (u \cos v, u \sin v, (u - 1)^3), \qquad u > 0,\ 0 \le v < 2\pi.$$

i) Scrivere l'equazione cartesiana del piano tangente a S nel punto corrispondente a $u = 1$, $v = 0$.

ii) Calcolare, in funzione di u, v, i coefficienti E, F, G e L, M, N rispettivamente della prima e della seconda forma fondamentale di S.

iii) Calcolare la curvatura Gaussiana K di S. Stabilire quali sono i punti ellittici, iperbolici e parabolici di S.