Cognome: .... **Nome:** .... **Numero di matricola:** ....

Corso di Geometria II, a. a. 2018-19

Prova in itinere del 11 giugno 2019

Norme per le prove in itinere e le prove scritte d'esame

1. Scrivere subito cognome, nome e numero di matricola su questo foglio.
2. Consegnate solo i fogli che ritenete essere bella copia.
3. **Svolgere gli esercizi con ordine e completezza, motivando ogni risposta. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza.**
4. Durante non si possono utilizzare calcolatrici o telefoni cellulari.
5. La durata della prova è di **1 ora e 45 minuti**. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

1. Si consideri nel piano euclideo privato dell'origine $X = \mathbb{R}^2 - O$, la relazione definita da

$$(x, y) \sim (x', y') \quad \Leftrightarrow \quad (x', y') = (2^n x, 2^n y) \text{ per qualche } n \in \mathbb{Z}.$$

i) Verificare che $\sim$ è una relazione di equivalenza.

Sia Z il quoziente topologico di X modulo $\sim$, e sia

$$p : X \to Z$$

la proiezione sul quoziente. Si ricordi che *la saturazione* di un sottoinsieme $A \subset X$ è definita come $p^{-1}(p(A))$.

ii) Descrivere le saturazioni $p^{-1}(p(S^1))$ e $p^{-1}(p(C_{1,2}))$ rispettivamente della circonferenza $S^1 = \{(x, y) \in X,\ x^2 + y^2 = 1\}$ e della corona circolare aperta $C_{1,2} = \{(x, y) \in X,\ 1 < x^2 + y^2 < 4\}$.

iii) Costruire un omeomorfismo tra il quoziente Z e il toro $T^2 = S^1 \times S^1$.

2. Si consideri l'aperto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ xy > 0\}$, e la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ grafico della funzione

$$z = \ln(xy),$$

definita in A.

i) Stabilire se S (con la topologia euclidea indotta) è connessa e in caso negativo individuare le sue componenti connesse.

ii) Scrivere nelle coordinate (x, y) di $\mathbb{R}^2$ l'equazione cartesiana della curva C intersezione di S con il piano $z = 0$. Osservare che C è una curva algebrica ben nota, e calcolare il valore massimo della curvatura k nei punti della curva C.

iii) Verificare che la superficie S è tutta a punti ellittici (ovvero con curvatura gaussiana $K > 0$).

3. Si consideri nello spazio euclideo privato dell'origine $X = \mathbb{R}^3 - O$, le applicazioni $f, g, h : X \to X$ definite da:

$$f(x, y, z) = (x, y, z), \quad g(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

$$h(x, y, z) = \left(\frac{x}{\max(|x|, |y|, |z|)}, \frac{y}{\max(|x|, |y|, |z|)}, \frac{z}{\max(|x|, |y|, |z|)} \right)$$

i) Costruire omotopie $G, H : X \times I \to X$ rispettivamente da f a g e da f a h.

ii) Da quanto sopra si può riconoscere che si sono costruite equivalenze omotopiche tra X e S^2 e tra X e la frontiera del cubo $[-1, 1]^3$? Come? Spiegare.