Applicazioni continue e sottoinsiemi

P. Piccinni

Corso di Geometria II (A-L), a.a. 2019-20
Laurea Triennale in Matematica
Sapienza Università di Roma Classroom - codice 24bsdao

Lezione del 6 marzo 2020, durata 2 ore

Indice

Aperti

Il fatto che la topologia voglia essere lo studio della continuità rende evidente che la nozione di applicazione continua sia in essa centrale.

Definizione. Siano (X, τ_X) e (Y, τ_Y) spazi topologici, e sia

$$f : X \to Y$$

un'applicazione. f si dice *continua* (rispetto alle topologie τ_X e τ_Y) se $A \in \tau_Y \; \Rightarrow \; f^{-1}(A) \in \tau_X$.

Come visto nel corso di Analisi I, ogni applicazione tra spazi metrici $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ che sia continua in ogni punto $x \in X$ - nel senso degli ϵ e δ, o equivalentemente dei dischi aperti $D_\epsilon(f(x))$ e $D_\delta(x)$ - è continua nel senso della precedente definizione. E viceversa!

Chiusi

In una delle pochissime lezioni che abbiamo avuto in aula abbiamo visto:

Proposizione. Siano (X, τ_X) e $(Y; \tau_Y)$ spazi topologici, e sia $f : X \to Y$ un'applicazione. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

i) f è continua;

ii) per ogni chiuso F nella topologia τ_Y la controimmagine $f^{-1}(F)$ è un chiuso nella topologia τ_X.

Dim: È una conseguenza della commutabilità tra complemento $\complement$ e controimmagine f^{-1}: $\complement_X(f^{-1}(F)) = f^{-1}(\complement_Y(F))$.

Intorni

Sia (X,τ) uno spazio topologico e sia $x \in X$. Un sottoinsieme $U \subset X$ si dice *intorno di* x se esiste un aperto $A \in \tau$ tale che

$$x \in A \subset U.$$

Dunque ogni aperto A è intorno di ogni suo punto, e anzi i sottoinsiemi di X che sono aperti sono caratterizzati dall'essere intorno di ogni loro punto.

Ricordiamo la notazione che abbiamo usato

$$\mathcal{N}(x) = \{U \subset X,\ U \text{ intorno di } x\}$$

per la famiglia degli intorni di $x \in X$.

Osservazione. Nei video delle lezioni del Prof. Zimmermann, "neighborhhood of x" è inteso solo come "intorno aperto di x".

Definizione di continuità in un punto

Definizione. Siano (X, τ_X) e (Y, τ_Y) spazi topologici, e sia

$$f : X \to Y$$

un'applicazione. f si dice *continua nel punto* x se per ogni $U \in \mathcal{N}(f(x))$ esiste un $V \in \mathcal{N}(x)$ tale che $f(V) \subset U$.

Proposizione. Siano (X, τ_X) e (Y, τ_Y) spazi topologici, e sia

$$f : X \to Y$$

un'applicazione. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

i) f è continua, ovvero $A \in \tau_Y \Rightarrow f^{-1}(A) \in \tau_X$;

ii) f è continua in ogni punto $x \in X$, ovvero per ogni $x \in X$ e per ogni $U \in \mathcal{N}(f(x))$ esiste un $V \in \mathcal{N}(x)$ tale che $f(V) \subset U$.

Def. con aperti $\Rightarrow$ def. con intorni

Dim.
i) $\Rightarrow$ ii). Sia $x \in X$ arbitrario e sia $U \in \mathcal{N}(f(x))$. Allora per definizione di intorno esiste $A \in \tau_Y$ con $f(x) \in A \subset U$. Dunque

$$x \in f^{-1}(A) \subset f^{-1}(U).$$

Si osservi ora che $f^{-1}(A)$ è aperto per ipotesi di continuità di f, e quindi $V = f^{-1}(U)$ è intorno di x. Ne segue:

$$f(x) \in f(f^{-1}(U)) = f(V) \subset U,$$

l'ultima inclusione essendo la proprietà insiemistica di inclusione dell'immagine della controimmagine di un sottoinsieme nel sottoinsieme stesso.

Def. con intorni $\Rightarrow$ def. con aperti

Dim.
ii) $\Rightarrow$ i). Sia $A \in \tau_X$ e sia $x \in f^{-1}(A)$ scelto arbitrariamente. Poiché $f(x) \in A$ e dunque A è intorno di $f(x)$, esiste un $V \in \mathcal{N}(x)$ tale che $f(V) \subset A$. Allora:

$$x \in V \subset f^{-1}(f(V)) \subset f^{-1}(A),$$

dove la prima inclusione è la proprietà insiemistica di inclusione di un sottoinsieme nella controimmagine della sua immagine.
Pertanto $f^{-1}(A)$ è intorno di ogni suo punto, e dunque è aperto.

Definizione

Definizione. Un'applicazione $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ tra spazi topologici si dice un *omeomorfismo* se f è biunivoca e continua insieme alla sua inversa f^{-1}.

[Si noti che esistono applicazioni biunivoche e continue che non sono omeomorfismi, p. es. l'identità $\mathrm{Id}(x) = x$, pensando Id da $(\mathbb{R}, \tau_{discr})$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$]

Definizione. Due spazi topologici $(X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ si dicono *omeomorfi* se esiste tra essi un omeomorfismo $f : X \to Y$.

Esempi elementari di omeomorfismi sono: l'identità su uno spazio topologico arbitrario, l'inverso f^{-1} di un omeomorfismo f, la composizione di due omeomorfismi.

La topologia vuole studiare (e se possibile classificare) gli spazi topologici a meno di omeomorfismi. La nozione è dunque di fondamentale importanza.

Altri esempi

Nella prima lezione (in aula) del corso abbiamo visto che esiste un'applicazione biunivoca $F : \mathbb{R} \leftrightarrow (0,1)$. Avevamo anche osservato che sia la F che l'inversa F^{-1} sono continue. F è dunque un omeomorfismo. Su entrambi gli spazi si sottintende qui la topologia euclidea $\mathcal{E}$.

Con la stessa costruzione si ottiene un omeomorfismo tra $\mathbb{R}$ e l'intevallo aperto limitato (a, b).

Esercizio: Gli intervalli aperti illimitati $(a, +\infty)$ e $(-\infty, b)$ sono tra loro omeomorfi? E sono omeomorfi a $\mathbb{R}$? (topologia euclidea sottintesa).

Esercizio: Con riferimento al file "Topologie su R.pdf", stabilire quali tra i seguenti spazi topologici sono tra loro omeomorfi e quali no:

$(\mathbb{R}, \mathcal{E})$, $(\mathbb{R}, j_d)$, $(\mathbb{R}, j_s)$, $(\mathbb{R}, \tau_{ban})$, $(\mathbb{R}, \tau_{discr})$, $(\mathbb{R}, i_d)$, $(\mathbb{R}, i_s)$, $(\mathbb{R}, \mathcal{Z})$, $(\mathbb{R}, k)$.

Sembra più facile stabilire se due spazi sono omeomorfi o se non lo sono?

Sottoinsiemi $S \subset X$

Sia (X, τ) uno spazio topologico. La scelta di un sottoinsieme $S \subset X$ ha il notevole effetto di tripartire X in tre parti, a due a due disgiunte:

$$X = \mathit{Int}\ S \ \cup \ \mathit{Est}\ S \ \cup \ \mathit{Fr}\ S,$$

chiamate risp. *parte interna* di S, *parte esterna* di S, e *frontiera* di S.

Ecco le loro definizioni:

$$\begin{aligned}
\mathit{Int}\ S &= \{x \in X \text{ tali che esiste un intorno } U \in \mathcal{N}(x) \text{ con } U \subset S\};\\
\mathit{Est}\ S &= \{x \in X \text{ tali che esiste un intorno } U \in \mathcal{N}(x) \text{ con } U \subset \complement_X S\};\\
\mathit{Fr}\ S &= \{x \in X \text{ tali che per ogni intorno } U \in \mathcal{N}(x) \text{ risulta } U \cap S \neq \emptyset \text{ e } U \cap \complement_X S \neq \emptyset\}.
\end{aligned}$$

e da esse segue subito che l'unione di questi tre sottoinsiemi di X è tutto X e che l'unione è disgiunta.

I punti di *Int* S si dicono *punti interni a* S, quelli di *Est* S si dicono *punti esterni a* S, quelli di *Fr* S si dicono *punti di frontiera per* S.

Qualche esempio

Primi esempi:

$(X,\tau) = (\mathbb{R};\mathcal{E})$, $S = [0,1]$. Allora *Int S* $= (0,1)$, *Est S* $= (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, *Fr S* $= \{0,1\}$.

$(X,\tau) = (\mathbb{R};\mathcal{E})$, $S = (0,1)$. Allora *Int S* $= (0,1)$, *Est S* $= (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, *Fr S* $= \{0,1\}$.

$(X,\tau) = (\mathbb{R};\mathcal{E})$, $S = [0,1)$. Allora *Int S* $= (0,1)$, *Est S* $= (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, *Fr S* $= \{0,1\}$.

Come si vede i punti di frontiera possono (tutti, nessuno, o in parte) appartenere a S.

Ancora:

$(X,\tau) = (\mathbb{R};\mathcal{E})$, $S = \mathbb{Z}$. Allora *Int S* $= \emptyset$, *Est S* $= \complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Z}$, *Fr S* $= \mathbb{Z}$.

$(X,\tau) = (\mathbb{R};\mathcal{E})$, $S = \mathbb{Q}$. Allora *Int S* $= \emptyset$, *Est S* $= \emptyset$, *Fr S* $= \mathbb{R}$.

$(X,\tau) = (\mathbb{R};\mathcal{E})$, $S = \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Allora *Int S* $= \emptyset$, *Est S* $= (-\infty,0)\cup\complement_{\mathbb{R}^+}S$, *Fr S* $= S\cup\{0\}$.

Anche qui è evidente i punti di frontiera possono (tutti, nessuno, o in parte) appartenere a S.

Proprietà

È corretto pensare la parte interna di S come "il più grande aperto contenuto in S". Infatti:

Proposizione. Risulta

$$Int\ S = \bigcup_{A_i \subset S} A_i,$$

ovvero $Int\ S$ è l'unione di tutti gli aperti A_i di X contenuti in S.
In particolare $Int\ S$ è aperto, e S è aperto se e solo se $S = Int\ S$.

Dim. Se A è un aperto contenuto in S, allora ogni $x \in A$ è interno per A, e dunque per S; dunque $A \subset\ Int\ S$. Ma $Int\ S$ è aperto, poiché è intorno di ogni suo punto, e dunque è un aperto contenuto in S.

Definizione e proprietà

Di chiusura abbiamo già parlato nel precedente file "Alcune topologie su $\mathbb{R}$". Ricordiamo quanto abbiamo detto al riguardo.

Definizione. La chiusura $\overline{S}$ di un sottoinsieme $S \subset X$ di uno spazio topologico (X, τ) è definita dall'intersezione

$$\overline{S} = \bigcap_{F_i \supset S} F_i$$

di tutti i chiusi F_i di X contenenti S. Dunque $\overline{S}$, intersezione di chiusi, è un chiuso e anzi è "il più piccolo chiuso contenente S".

Nello stesso file avevamo proposto il seguente esercizio, che ora svolgeremo.

Esercizio. Riconoscere che la chiusura $\overline{S}$ consiste di tutti e soli i punti $x \in X$ *aderenti a* S, ovvero tali che tali che ogni intorno U_x di x ha intersezione non vuota con S: $U_x \cap S \neq \emptyset$,

$\overline{S} = S \cup \ Fr\ S = \ Int\ S \cup \ Fr\ S$

Svolgimento dell'esercizio: Dalla definizione

$$\boxed{x \in X \textit{ aderente a } S \text{ se ogni intorno } U_x \text{ di } x \text{ ha intersezione non vuota con } S: \ U_x \cap S \neq \emptyset}$$

vediamo subito le due possibilità:

i) $x \in S$, e allora certamente $U_x \cap S \neq \emptyset$ per ogni intorno U_x di x;
ii) $x \notin S$, e allora se per ogni intorno U_x di x risulta $U_x \cap S \neq \emptyset$, certamente $x \in \ Fr\ S$.

Ne segue:

$$\{\text{punti aderenti a } S\} = S \cup \ Fr\ S = \ Int\ S \cup \ Fr\ S,$$

la seconda uguaglianza essendo motivata dal fatto che i punti di S o sono interni a S o di frontiera per S.

Per concludere basta ora osservare che, ponendo $A_i = \complement_X F_i$, per una delle formule di di Morgan:

$$Int\ S \cup \ Fr\ S = \complement_X \ Est\ S = \complement_X \Big(\bigcup_{A_i \subset \complement_X S} A_i \Big) = \bigcap_{A_i \subset \complement_X S} \complement_X A_i = \bigcap_{F_i \supset S} F_i = \overline{S}.$$

Sottoinsiemi e continuità

Le nozioni di chiusura e di parte interna di un sottoinsieme di uno spazio topologico si prestano a caratterizzare le applicazioni continue. Ecco gli enunciati.

Proposizione 1. Siano (X, τ_X) e (Y, τ_Y) spazi topologici e sia $f : X \to Y$.
f è continua se e solo se per ogni sottoinsieme $S \subset X$ risulta:

$$f(\overline{S}) \subset \overline{f(S)}.$$

Proposizione 2. Siano (X, τ_X) e (Y, τ_Y) spazi topologici e sia $f : X \to Y$.
f è continua se e solo se per ogni sottoinsieme $T \subset Y$ risulta:

$$f^{-1}(Int\ T) \subset\ Int\ (f^{-1}(T)).$$

Dim. Proposizione 1

Dimostriamo solo la Prop. 1. La dimostrazione della Prop. 2 è simile.

Dim. Prop. 1.

Implicazione $\Rightarrow$: ovvero f continua $\Rightarrow f(\overline{S}) \subset \overline{f(S)}$ per ogni $S \subset X$.
Sia $x \in \overline{S}$, dunque x aderente a S. Allora per ogni $V_x \in \mathcal{N}(x)$ è $V_x \cap S \neq \emptyset$. Sia $U_{f(x)} \in \mathcal{N}(f(x))$ arbitrario. Poiché f è continua, esiste $V_x \in \mathcal{N}(x)$ con $f(V_x) \subset U_{f(x)}$. Ma $V_x \cap S \neq \emptyset$ e dunque $f(V_x \cap S) \neq \emptyset$. Consideriamo ora $U_{f(x)} \cap f(S)$. Risulta (nella prima inclusione si usa una proprietà insiemistica relativa all'immagine):

$$\emptyset \neq f(V_x \cap S) \subset f(V_x) \cap f(S) \subset U_{f(x)} \cap f(S).$$

Implicazione $\Leftarrow$: ovvero $f(\overline{S}) \subset \overline{f(S)}$ per ogni $S \subset X \Rightarrow f$ continua.
Sia F un chiuso in Y e supponiamo per assurdo che $S = f^{-1}(F)$ non sia chiuso in X. Esiste allora un $x \in \overline{S}$, ma $x \notin S$. Ma allora (usando l'ipotesi e la proprietà insiemistica dell'immagine della controimmagine)

$$f(x) \in f(\overline{S}) \subset \overline{f(S)} = \overline{f(f^{-1}(F))} \subset \overline{F} = F,$$

che contraddice $x \notin S = f^{-1}(F)$.