Spazi compatti

P. Piccinni

Corso di Geometria II (A-L), a.a. 2019-20
Laurea Triennale in Matematica
Sapienza Università di Roma Classroom - codice 24bsdao

Lezione del 31 marzo 2020, durata 2 ore
Lezione del 2 aprile 2020, durata 2 ore

Indice

Compattezza negli spazi metrici

La compattezza è una delle più importanti proprietà topologiche. Si tratta di una nozione certamente non nuova per gli studenti di Geometria II.

In particolare, nel corso di Analisi I, si è studiata la compattezza negli spazi metrici; si raccomanda al riguardo di rileggere il paragrafo 4 degli appunti "Spazi metrici" del Prof. Orsina.

Nel citato paragrafo 4 di Orsina, è presente la stessa definizione di compattezza che viene data nelle successive slides. L'unica differenza è che qui ci riferiamo alla più ampia classe degli spazi topologici. Similmente, vari enunciati e proprietà di questo file sono già presenti negli appunti del Prof. Orsina, sempre solo nel contesto degli spazi metrici (o, se si preferisce, degli spazi topologici metrizzabili).

Ricoprimenti e sottoricoprimenti

Definizione. Sia X un insieme. Una famiglia $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ di sottoinsiemi $U_\alpha \subset X$ si dice un *ricoprimento* di X se risulta

$$X = \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha.$$

Se, per un sottoinsieme $I \subset J$ dell'insieme di indici risulta ancora

$$X = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha,$$

diciamo che $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ è un *sottoricoprimento* di $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$, e se l'insieme I è un insieme finito, diciamo che $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ è un *sottoricoprimento finito* di $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$.

Definizione. Se (X, τ) è uno spazio topologico diciamo che $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$, $U_\alpha \subset X$ è un *ricoprimento aperto* di X ogni U_α è un aperto in τ.

Definizione

Definizione. Uno spazio topologico (X, τ) si dice *compatto* se ogni ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ di X ammette un sottoricoprimento finito.

Osservazioni. La richiesta di compattezza è nello stesso tempo una richiesta fortissima e una proprietà difficile da verificare per un assegnato spazio topologico. Qualche dettaglio su ciò:

- La definizione di X compatto *non è "se X ammette un ricoprimento finito"*. Ciò sarebbe vero per ogni spazio topologico, essendovi in ogni spazio topologico un ricoprimento formato addirittura da *un solo aperto*: l'aperto X stesso!
- La compattezza è invece la richiesta che *ogni* ricoprimento aperto - e si pensi a quanti ricoprimenti aperti vi siano per le topologie che conosciamo p. es. su $\mathbb{R}$ - ammetta un sottoricoprimento finito.
- Da quanto sopra si comprende come sia difficile verificare, utilizzando la definizione, che uno spazio topologico sia compatto. Con l'eccezione, naturalmente, di quando o l'insieme X sia finito (e abbiamo dunque un numero finito di ricoprimenti, anche insiemistici), o che la topologia sia finita, ovvero formata da un numero finito di aperti. P. es. è compatto l'insieme $\mathbb{R}$, che è ovviamente infinito, ma con la topologia finita $\tau = \{\emptyset,\ \mathbb{Q},\ \complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q},\ \mathbb{R}\}$.
- Si comprende dunque quanto sia utile elaborare la nozione di compattezza, e p. es. caratterizzare (come è stato fatto per la nozione di connessione) quali siano i sottoinsiemi di $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ che siano compatti come sottospazi topologici.

Compattezza di $[a, b]$

Teorema (Lemma di Heine-Borel). Gli intervalli chiusi e limitati $[a, b]$ di $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ sono compatti.

La dimostrazione non può che essere "a mano", ovvero utilizzando la definizione di compattezza. Sia dunque $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ un arbitrario ricoprimento aperto di $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$. Definiamo:

$$Z_{\mathcal{U}} = \{z \in [a, b],\ \text{tali che } [a, z] \text{ sia ricopribile con un numero finito di aperti di } \mathcal{U}\} \subset [a, b],$$

e sia $c = \sup Z_{\mathcal{U}}$. Allora:

- $Z_{\mathcal{U}}$ è non vuoto: $a \in Z_{\mathcal{U}}$.
- Risulta $c \in Z_{\mathcal{U}}$. Infatti sia $c \in U_{\alpha_0}$; per costruzione della topologia euclidea, U_{α_0} è unione di intervalli aperti di $\mathbb{R}$, intersecati con $[a, b]$. Dunque per qualche $\epsilon > 0$ risulta:

$$\begin{cases} (c-\epsilon, c+\epsilon) \subset U_{\alpha_0}, & \text{se } c < b \\ (c-\epsilon, b] \subset U_{\alpha_0}, & \text{se } c = b \end{cases}$$

  In entrambi i casi $(c-\epsilon, c] \subset U_{\alpha_0}$. Per definizione di sup, $(c-\epsilon, c]$ contiene qualche punto $z \in Z_{\mathcal{U}}$. Dunque per definizione di $Z_{\mathcal{U}}$, vi è un numero finito di aperti di $\mathcal{U}$:

$$U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_r},$$

  che ricoprono $[a, z]$. Ne segue che

$$U_{\alpha_0}, U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_r}$$

  ricoprono $[a, c]$, ovvero $c = \sup Z_{\mathcal{U}} \in Z_{\mathcal{U}}$.

Fine dimostrazione e compattezza del quadrato ordinato

- Risulta $c = b$. Supponiamo per assurdo $c < b$. Se $c \in U_{\alpha_0}$, avremmo

$$(c - \epsilon, c + \epsilon) \subset U_{\alpha_0}.$$

Dunque, per ogni $w \in [c, c + \epsilon)$ avremmo $w \in Z_{\mathcal{U}}$, dato che $[a, w]$ si può certamente ricoprire con un numero finito di aperti di $\mathcal{U}$. Ciò contraddice il fatto che $c = \sup Z_{\mathcal{U}}$.

Osservazione. Similmente a quanto osservato per la connessione degli intervalli, il precedente Lemma di Heine-Borel vale, con dimostrazione invariata, per "intervalli chiusi e limitati generalizzati" in spazi totalmente ordinati dotati della proprietà dell'estremo superiore e della order topology. Esempi sono al solito $\mathbb{R}^2$ con l'ordinamento lessicografico, e il quadrato ordinato $\mathbb{I}^2$, anch'esso dotato dell'ordinamento lessicografico.

In particolare si deduce la compattezza del quadrato ordinato $\mathbb{I}^2$, cfr. video n. 8 del Prof. Zimmermann.

Enunciato Teorema Heine-Borel

Il precedente Lemma di Heine-Borel inizia un percorso il cui traguardo è il seguente fondamentale

Teorema di Heine-Borel (Caratterizzazione compatti di $\mathbb{R}^n$).
I sottoinsiemi compatti di $(\mathbb{R}^n, \mathcal{E})$ sono tutti e soli i chiusi e limitati.

La dimostrazione è distribuita nelle prossime nove slides, e coinvolgerà vari teoremi. Si segnala tuttavia che tali teoremi, che denoteremo con le lettere A,B,C, hanno un notevole interesse, indipendentemente dal loro ruolo di "lemmi" del Teorema di Heine-Borel.

Osservazione. È appena il caso di notare che il Lemma di Heine-Borel certamente non afferma che gli intervalli chiusi e limitati siano *tutti* i compatti di $\mathbb{R}$. Sono compatti (a norma del Teorema di Heine-Borel) p. es. le unioni finite di intervalli chiusi e limitati, le unioni finite di intervalli chiusi e limitati e di punti (necessariamente isolati), o ancora le unioni finite di punti.

Teorema A

Teorema A. Un sottoinsieme F chiuso di uno spazio topologico compatto X è compatto nella topologia del sottospazio.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ un arbitrario ricoprimento aperto di F. Allora, per ogni α risulta $U_\alpha = V_\alpha \cap F$, dove ogni V_α è aperto in X. Ne segue che

$$\mathcal{V} = \{\{V_\alpha\}_{\alpha \in J},\ \complement_X F\}$$

è un ricoprimento aperto di X. Poiché X è compatto, esso ammette un sottoricoprimento finito:

$$\mathcal{V}' = \{V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_r}, \complement_X F\}.$$

Ne segue che

$$\mathcal{U}' = \{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_r}\}$$

è un sottoricoprimento finito di F. Dunque F è compatto.

Teorema B

Teorema B. Sia F un sottospazio compatto di uno spazio di Hausdorff X. Allora F è chiuso in X.

Dimostrazione. Mostreremo che $\complement_X F$ è aperto. Fissiamo arbitrariamente un punto $p \in \complement_X F$, e mostriamo che esiste un intorno aperto U_p con $p \in U_p \subset \complement_X F$.

Dato che X è di Hausdorff, per ogni $x \in F$ esistono intorni U_x di p e V_x di x con $U_x \cap V_x = \emptyset$. Naturalmente, dato che x varia arbitrariamente in F, le interzezioni

$$V'_x = V_x \cap F$$

costituiscono un ricoprimento aperto di F. Poiché F è compatto, abbiamo dunque un sottoricoprimento finito

$$V'_{x_1} = V_{x_1} \cap F,\ \dots,\ V'_{x_r} = V_{x_r} \cap F,$$

e guardiamo ai corrispondenti intorni di p: $U_{x_1}, \dots, U_{x_r}$. Risulta che la loro intersezione

$$U_p = U_{x_1} \cap \cdots \cap U_{x_r}$$

ha intersezione vuota con tutti i $V_{x_1}, \dots, V_{x_r}$, e dunque con tutti i $V'_{x_1}, \dots, V'_{x_r}$, la cui unione è F. Dunque $p \in U_p \subset \complement_X F$, e $\complement_X F$ è aperto.

Corollario

Definizione. Un sottoinsieme F di uno spazio metrico (X, d) si dice *limitato* se F è contenuto in un disco $D_r x$ di X o, equivalentemente, se il suo *diametro* $\sup_{x,y \in F} d(x, y)$ è finito.

Corollario. Un sottospazio F di $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ è compatto se e solo se F è chiuso e limitato.

Dimostrazione. Supponiamo F compatto. Poiché $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ è di Hausdorff, F è chiuso per il Teorema B. Consideriamo il seguente ricoprimento aperto di F

$$\mathcal{U} = \{(-r, r) \cap F\}_{r \in \mathbb{R}^+}.$$

Poiché F è compatto, esso ammette un sottoricoprimento finito

$$\{(-r_1, r_1) \cap F, \ldots, (-r_k, r_k) \cap F\}.$$

Se $R = \max\{r_1, \ldots, r_k\}$, risulta $F \subset (-R, R)$, e dunque F è limitato.

Viceversa, se F è limitato, F è contenuto in un intervallo $[-R, R]$, che è compatto per il Lemma di Heine-Borel. Dunque se F è anche chiuso, esso è un chiuso di un compatto e quindi, per il Teorema A, concludiamo che F è compatto.

Teorema C

Il Teorema di Heine-Borel è dunque l'estensione da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^n$ del precedente Corollario. Per tale estensione servirà il seguente

Teorema C (Teorema di Tychonoff). Siano X e Y spazi topologici compatti. Allora il prodotto topologico $X \times Y$ è compatto.

Ci limiteremo nella dimostrazione a questo enunciato, relativo al prodotto di due spazi fattori. Induttivamente si ottiene che il prodotto di un numero finito di spazi compatti è compatto.

Come accennato nelle slides "Prodotti.pdf", il teorema del prodotto di Tychonoff vale anche per un prodotto infinito di spazi compatti. Per chi fosse interessato, la dimostrazione si trova sia su Sernesi Capitolo 3, paragrafo 9, che su Manetti, paragrafo 7.2. Segnaliamo che nel caso di infiniti fattori, il teorema vale per la topologia prodotto ma non per la box topology.

Inizio dimostrazione

Teorema C (Teorema di Tychonoff). Siano X e Y spazi topologici compatti. Allora il prodotto topologico $X \times Y$ è compatto.

Dimostrazione. Consideriamo in primo luogo un ricoprimento aperto "rettangolare" di $X \times Y$, ovvero del tipo

$$\mathcal{W} = \{W_\alpha = U_\alpha \times V_\alpha\}_{\alpha \in J},$$

dove U_α, V_α sono aperti rispettivamente in X e in Y. Consideriamo i sottospazi

$$Y_{x_0} = \{x_0\} \times Y \subset X \times Y, \quad \text{al variare di} \quad x_0 \in X,$$

tutti omeomorfi a Y. Consideriamo

$$\mathcal{W}_{x_0} = \{W_\alpha \cap Y_{x_0}\}_{\alpha \in J},$$

la "restrizione" di $\mathcal{W}$ a Y_{x_0}, che per la compattezza di Y_{x_0} ammetterà un sottoricoprimento finito, in corrispondenza di un sottoinsieme finito di indici $J_{x_0} \subset J$.

Se X è un insieme finito, otteniamo così un sottoricoprimento finito di $\mathcal{W}$; altrimenti, dobbiamo usare anche la compattezza di X.

Seguito dim.ne: ricoprimenti rettangolari

Teorema C (Teorema di Tychonoff). Siano X e Y spazi topologici compatti. Allora il prodotto topologico $X \times Y$ è compatto.

Seguito dimostrazione. Osserviamo ora che, essendo

$$W_\alpha = U_\alpha \times V_\alpha$$

risulta che

$$\bigcup_{\alpha \in J_{x_0}} W_\alpha$$

contiene, non solo $Y_{x_0} = \{x_0\} \times Y$, ma anche $U_{x_0} \times Y$, dove

$$U_{x_0} = \bigcap_{\alpha \in J_{x_0}} U_\alpha$$

che, ricordando che l'insieme J_{x_0} di indici è finito, risulta aperto. $U_{x_0} \times Y$ è chiamato *tubo* attorno a Y.

Al variare di x_0 in X si ottiene dunque un ricoprimento aperto $\{U_{x_0}\}_{x_0 \in X}$ di X e per la compattezza di X un sottoricoprimento finito:

$$\{U_{x_0}, U_{x_1}, \ldots, U_{x_s}\}.$$

Ancora seguito dim.ne: ricoprimenti rettangolari

Teorema C (Teorema di Tychonoff). Siano X e Y spazi topologici compatti. Allora il prodotto topologico $X \times Y$ è compatto.

Ancora seguito dimostrazione. Per ottenere un sottoricoprimento finito $\{W_\alpha\}_{\alpha \in I}$ di $\mathcal{W}$, dunque con l'insieme I di indici finito, basta assumere

$$I = J_{x_0} \cup J_{x_1} \cup \ \dots, \ J_{x_s},$$

ovvero che I sia la famiglia di indici che figurano in qualcuno dei sottoinsiemi $J_{x_0}, J_{x_1}, \dots, J_{x_s}$ relativi ai punti risp. $x_0, x_1, \dots, x_s$. Infatti $\{W_\alpha\}_{\alpha \in I}$ è un ricoprimento di $X \times Y$:

$$\bigcup_{\alpha \in I} W_\alpha = \Big(\bigcup_{\alpha \in J_{x_0}} W_\alpha \Big) \cup \dots \cup \Big(\bigcup_{\alpha \in J_{x_s}} W_\alpha \Big) \supset$$

$$\supset \big(U_{x_0} \times Y\big) \cup \dots \cup \big(U_{x_s} \times Y\big) = \big(U_{x_0} \cup \dots \cup U_{x_s}\big) \times Y = X \times Y.$$

Ricoprimenti arbitrari

Teorema C (Teorema di Tychonoff). Siano X e Y spazi topologici compatti. Allora il prodotto topologico $X \times Y$ è compatto.

Abbiamo dunque dimostrato il teorema solo per ricoprimenti aperti "rettangolari" di $X \times Y$. Assumiamo ora che

$$\mathcal{Z} = \{Z_\beta\}_{\beta \in K}$$

sia un arbitrario ricoprimento aperto di $X \times Y$. Per costruzione della topologia prodotto risulta:

$$Z_\beta = \bigcup_{\alpha \in J(\beta)} U_\alpha^{(\beta)} \times V_\alpha^{(\beta)} = \bigcup_{\alpha \in J(\beta)} W_\alpha^{(\beta)}$$

e dunque $\mathcal{W} = \{W_\alpha^{(\beta)}\}_{\alpha \in J(\beta), \beta \in K}$ è un ricoprimento del tipo rettangolare già esaminato. Da esso possiamo pertanto estrarre un sottoricoprimento finito

$$\{W_{\alpha_0}, W_{\alpha_1}, , \ldots, W_{\alpha_s}\},$$

e se $W_{\alpha_0} \subset Z_{\beta_0}, W_{\alpha_1} \subset Z_{\beta_1}, \ldots, W_{\alpha_s} \subset Z_{\beta_s}$, risulta:

$$\bigcup_{k=0,\ldots,s} Z_{\beta_k} \supset \bigcup_{j=0,\ldots,s} W_{\alpha_j} = X \times Y.$$

Quindi $\{Z_{\beta_0}, Z_{\beta_1}, \ldots, Z_{\beta_s}\}$ è un sottoricoprimento finito di $\mathcal{Z}$, e il teorema è dimostrato.

Dim.ne Teor. Heine-Borel

Siamo finalmente al

Teorema di Heine-Borel (Caratterizzazione compatti di $\mathbb{R}^n$).
I sottoinsiemi compatti $(\mathbb{R}^n, \mathcal{E})$ sono tutti e soli i chiusi e limitati.

Dimostrazione. Sia F chiuso e limitato in $\mathbb{R}^n$. Essendo limitato, F è contenuto, per qualche $R > 0$, nel disco $D_R 0$, e dunque anche nell'ipercubo $\mathbb{I}^n_{2R} = [-R, R]^n$. Per il Lemma di Heine-Borel $[-R, R]$ è compatto in $\mathbb{R}$ e dunque, per il Teorema C, tale ipercubo è compatto. Dunque F, chiuso di un compatto, per il Teorema A è compatto.

Viceversa, se $F \subset \mathbb{R}^n$ è compatto, dato che $\mathbb{R}^n$ è di Hausdorff, dal Teorema B segue che F è chiuso. Si consideri d'altra parte il ricoprimento aperto di F

$$\{D_r 0 \ \cap F\}_{r>0}.$$

Poiché F è compatto, esso ammette un sottoricoprimento finito, e sia esso

$$\{D_{r_1} 0 \ \cap F, \dots, D_{r_k} 0 \ \cap F\}.$$

Se $R = \max\{r_1, \dots, r_k\}$, segue che $F \subset D_R 0$, ovvero F è anche limitato.

Immagine continua

Proposizione. Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua di spazi topologici. Se X è compatto, anche l'immagine $f(X) \subset Y$ è compatta.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ un ricoprimento aperto di $f(X)$. Allora $f^{-1}(\mathcal{U}) = \{f^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in J}$ è un ricoprimento aperto di X, ed essendo X compatto esiste un sottoricoprimento finito. Dunque per opportuni indici $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in J$ risulta

$$X = f^{-1}(U_{\alpha_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(U_{\alpha_k}).$$

Ne segue $\big($ricordando le proprietà insiemistiche che l'immagine di una f conserva le unioni, e che $f(f^{-1}(U)) \subset U\big)$:

$$f(X) = f\Big(f^{-1}(U_{\alpha_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(U_{\alpha_k})\Big) \subset U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_k},$$

e dunque $\{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_k}\}$ costituisce un sottoricoprimento finito del ricoprimento $\mathcal{U}$, che era stato arbitrariamente scelto.

Corollario. La compattezza è una proprietà topologica. In altri termini, se X è compatto e $h : X \to Y$ è un omeomorfismo di spazi topologici, allora anche Y è compatto.

$f : X \to \mathbb{R}$

Un'altra applicazione della compattezza dell'immagine continua di un compatto è il seguente

Teorema di Weierstrass. Sia $f : X \to \mathbb{R}$ un'applicazione continua dallo spazio topologico compatto X alla retta euclidea $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$. Allora f ammette massimo e minimo.

La dimostrazione è immediata. Per la precedente Proposizione, anche $f(X) \subset \mathbb{R}$ è compatto. Dunque $f(X)$ è chiuso e limitato. Essendo $f(X)$ limitato risulta

$$\sup f(X) < +\infty, \qquad \inf(f(X) > -\infty.$$

Per definizione, $\sup f(X)$ e $\inf f(X)$ sono punti aderenti a $f(X)$, e poiché $f(X)$ è chiuso, essi appartengono a $f(X)$.

Dunque essi sono rispettivamente massimo e minimo.

Osservazione. Il teorema di Weierstrass, e la precedente dimostrazione, si estendono senza modifiche ad applicazioni continue $f : X \to Y$ dallo spazio topologico compatto X ad uno spazio totalmente ordinato Y dotato della order topology.

Un po' di storia

Le definizione di spazio compatto, elaborata nelle precedenti slides, risponde all'esigenza di formulare, nell'ampio contesto della topologia, diverse proprietà osservate per le funzioni continue f a valori reali e definite in un intervallo $[a, b]$ di $\mathbb{R}$, o in un compatto K di $\mathbb{R}^n$. Esempi sono il teorema di Weierstrass sopra ricordato, e il teorema di Heine-Cantor che assicura l'uniforme continuità della funzione f.

Il fatto che ogni sottoinsieme Z infinito di $[a, b]$ o del compatto K avesse necessariamente un punto di accumulazione fu riconosciuta come una proprietà cruciale per la dimostrazione dei teoremi ricordati, e fu inizialmente assunta come definizione di "compattezza". Vedremo che tale definizione non è del tutto equivalente a quella data sopra usando i ricoprimenti aperti in spazi topologici, pur essendolo nel contesto degli spazi metrici (cfr. gli appunti "Spazi metrici" del Prof. Orsina, usati nel corso di Analisi I).

Andiamo con ordine, e dimostriamo in primo luogo il seguente

Teorema di Bolzano-Weierstrass. In uno spazio topologico (X, τ) compatto ogni insieme infinito Z ammette un *punto di accumulazione*, per definizione un punto x_0 tale che ogni intorno di x_0 interseca Z in punti diversi da x_0.

Due dimostrazioni

Teorema di Bolzano-Weierstrass. In uno spazio topologico (X, τ) compatto ogni insieme infinito Z ammette un punto di accumulazione.

Data l'importanza, diamo due dimostrazioni (tra loro alquanto simili).

Prima dimostrazione. Per assurdo, se Z non ammette in X punti di accumulazione, ogni punto $x \in \complement_X Z$ ammette un intorno aperto U_x con $U_x \cap Z = \emptyset$. Dunque ogni $x \in \complement_X Z$ è interno a $\complement_X Z$, e pertanto $\complement_X Z$ è aperto.
D'altra parte, sempre se Z non ammette in X punti di accumulazione, ogni $z \in Z$ ha un intorno aperto U_z con $U_z \cap Z = \{z\}$. Poiché X è compatto, il ricoprimento aperto

$$\mathcal{U} = \{U_x, U_z\}_{x \in \complement_X Z; z \in Z}$$

ammette un sottoricoprimento finito. Dunque vi è un numero finito di aperti U_z che contengono punti di Z, e ogni U_z ne contiene solo uno. Ciò contraddice il fatto che Z sia infinito.

Seconda dimostrazione. Ancora per assurdo, se Z non ammette in X punti di accumulazione, come visto sopra, $\complement_X Z$ è aperto. Dunque Z è chiuso, ed essendo chiuso del compatto X, per il precedente Teorema A, F è compatto. Ma, sempre nell'ipotesi che Z non ammette in X punti di accumulazione, ogni $z \in Z$ è isolato e dunque la topologia indotta da X su Z è la topologia discreta. Pertanto F, compatto e con la topologia discreta, non può essere infinito.

Tre definizioni

Definizione A. Lo spazio topologico (X, τ) si dice *compatto* se ogni suo ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento finito.

Definizione B. Lo spazio topologico (X, τ) si dice *numerabilmente compatto* se ogni suo sottoinsieme infinito ammette un punto di accumulazione.

Definizione C. Lo spazio topologico (X, τ) si dice *compatto per successioni* se in esso ogni successione ammette una sottosuccessione convergente a un limite.

In Analisi I si è (quasi) visto che, se (X, τ) è metrizzabile, le tre Definizioni A, B, C sono equivalenti. Cfr. "Spazi metrici" del Prof. Orsina, e in particolare:

- Def. A $\Leftrightarrow$ Def. C sono i teoremi 4.7 e 4.14 di Orsina.
- Def. A $\Rightarrow$ Def. B è il Teorema 4.6 di Orsina (Bolzano-Weierstrass)
- Def. B $\Rightarrow$ Def. C è un esercizio (si assuma che x sia punto di accumulazione di $\{x_n\}$, e si usi una base numerabile di intorni $\{U_k\}$ di x con $U_{k+1} \subset U_k$ per costruire una sottosuccessione convergente a x).

Confronto di terminologie

Terminologie usate per le tre nozioni di compattezza:

Queste slides	Compatto	Numerabilmente compatto	Compatto per successioni
Sernesi	Compatto	Numerabilmente compatto	Compatto per successioni
Manetti	Compatto	(*)	Compatto per successioni
Zimmermann	Compact	Limit point compact	Sequentially compact

(*) Manetti non ha una terminologia specifica per gli spazi topologici che verificano la tesi del Teorema di Bolzano-Weierstrass (ogni sottoinsieme infinito Z ammette un punto di accumulazione), anche se tratta di questa nozione, cfr. esercizio 6.10, p. 120.

Implicazioni

Come abbiamo detto

In spazi metrici (X, d):

Compatto $\Leftrightarrow$ Numerabilmente compatto $\Leftrightarrow$ Compatto per successioni

Più in generale, le implicazioni sono le seguenti

In spazi topologici (X, τ):

Compatto $\Rightarrow$ Numerabilmente compatto $\Leftarrow$ Compatto per successioni

L'implicazione a sinistra è naturalmente il teorema di Bolzano-Weierstrass.

L'implicazione a destra segue dal fatto che, se X è compatto per successioni e se Z è un suo insieme infinito, allora ogni successione di elementi $\{z_n\}$ estratti da Z e con tutti gli z_n distinti ammette una sottosuccessione convergente a un $x \in X$. Dunque x è punto di accumulazione per l'insieme $\{z_n\}$ e dunque per Z.

Nella prossima slide mostreremo con un esempio che le tre nozioni non sono equivalenti.

Lo spazio topologico $(\mathbb{N}, \mathcal{I})$

Esempio. Nell'insieme $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ dei numeri naturali la famiglia

$$\mathcal{B}_{\mathcal{I}} = \{2n - 1, 2n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

è una base per una topologia, che denoteremo con $\mathcal{I}$.

La verifica delle due proprietà B1 e B2, che caratterizzano le basi per una topologia, è immediata, dato che elementi distinti di $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}$ hanno intersezione vuota.

Proposizione. $(\mathbb{N}, \mathcal{I})$ è numerabilmente compatto, ma non è né compatto, né compatto per successioni.

Dimostrazione. Il ricoprimento aperto (numerabile) costituito dagli elementi della base è formato da aperti disgiunti, e pertanto non ammette un sottoricoprimento finito. Dunque $(\mathbb{N}, \mathcal{I})$ non è compatto. Non è neanche compatto per successioni, dato che la successione $\{n\}$ non ammette sottosuccessioni convergenti. Ma è numerabilmente compatto: comunque si consideri un sottoinsieme Z infinito (e per la verità anche finito), sia $z \in Z$. Secondo che z sia dispari o pari, $z + 1$ o $z - 1$ è punto di accumulazione per Z.

Vale la pena osservare che $(\mathbb{N}, \mathcal{I})$ non è di Hausdorff. Dunque non è metrizzabile (come confermato dalla precedente Proposizione e dal fatto che per spazi metrici le tre condizioni di compattezza si equivalgono).

Introduzione

Tirando le somme, abbiamo detto che la proprietà di compattezza per uno spazio topologico è una richiesta molto forte. D'altra parte è una proprietà che ha importanti conseguenze, già ampiamente viste nei corsi di Analisi. Si comprende dunque l'importanza della seguente domanda:

Se (X, τ) è uno spazio topologico non compatto, è possibile "compattificarlo" cambiandolo di poco?

Naturalmente, bisogna capire cosa significa "cambiandolo di poco".

La precedente domanda, benché vaga, è però sufficiente per poter apprezzare il seguente

Teorema (Compattificazione di Alexandroff). Sia (X, τ) uno spazio topologico non compatto. Allora, aggiungendo un solo punto, che denotiamo con ∞, all'insieme X, è possibile definire su

$$\hat{X} = X \cup \{\infty\}$$

una topologia $\hat{\tau}$ tale che:

i) l'inclusione $i : X \hookrightarrow \hat{X}$ è un omeomorfismo sull'immagine $i(X) \subset \hat{X}$, e $\hat{X} = \overline{i(X)}$, ovvero $i(X)$ è denso in $\hat{X}$.

ii) $(\hat{X}, \hat{\tau})$ è compatto.

La topologia $\hat{\tau}$

In quel che segue, svolgiamo l'esercizio 7, domande (a) e (b), del Foglio 4.

Teorema (Topologia di Alexandroff). Sia (X, τ) non compatto e sia $\infty \notin X$. Definiamo su
$$\hat{X} = X \cup \{\infty\}$$
la topologia
$$\hat{\tau} = \tau \bigcup \Big\{ A \subset \hat{X}, \text{ tale che } \infty \in A \text{ e } \complement_{\hat{X}} A \text{ è chiuso e compatto in } X \Big\}.$$

Allora:

i) l'inclusione $i : X \hookrightarrow \hat{X}$ è un omeomorfismo su $i(X) \subset \hat{X}$, e $\hat{X} = \overline{i(X)}$.

ii) $(\hat{X}, \hat{\tau})$ è compatto.

Dimostrazione. Verifichiamo in primo luogo che $\hat{\tau}$ è una topologia. Tacitamente $\emptyset, \hat{X} \in \hat{\tau}$. Poi unioni di elementi di τ sono in τ, e unioni di $A_\alpha \ni \infty$ con $\complement_{\hat{X}} A_\alpha$ chiuso e compatto sono tali che $\bigcup A_\alpha \ni \infty$ e $\complement_{\hat{X}}\big(\bigcup_\alpha A_\alpha\big) = \bigcap_\alpha \complement_{\hat{X}} A_\alpha$ è chiuso e compatto in X. Inoltre se $A' \in \tau$ e $A \ni \infty$ con $\complement_{\hat{X}} A$ chiuso e compatto, risulta che $\complement_{\hat{X}}(A' \cup A) = (\complement_{\hat{X}} A') \cap (\complement_{\hat{X}} A)$ è chiuso di un compatto di X, dunque chiuso e compatto in X.

Analogamente procede la verifica per le intersezioni di due aperti in $\hat{\tau}$.

Proprietà di $(\hat{X}, \hat{\tau})$

Teorema (Topologia di Alexandroff). Sia (X, τ) non compatto e sia $\infty \notin X$. Definiamo su

$$\hat{X} = X \cup \{\infty\}$$

la topologia

$$\hat{\tau} = \tau \bigcup \left\{ A \subset \hat{X}, \text{ tale che } \infty \in A \text{ e } \complement_{\hat{X}} A \text{ è chiuso e compatto in } X \right\}.$$

Allora:

i) l'inclusione $i : X \hookrightarrow \hat{X}$ è un omeomorfismo su $i(X) \subset \hat{X}$, e $\hat{X} = \overline{i(X)}$.

ii) $(\hat{X}, \hat{\tau})$ è compatto.

Dimostriamo ora le proprietà asserite.
i) Si noti in primo luogo che $\hat{\tau}|_X = \tau$, da cui l'omeomorfismo $i : X \to i(X)$. Si osservi poi che ogni aperto $A \ni \infty$ ha intersezione non vuota con X: il complementare di A in X deve essere infatti chiuso e compatto, e X non è compatto per ipotesi. Ne segue che $i(X)$ è denso in $\hat{X}$.

ii) Sia $\mathcal{U} = \{A_\alpha\}$ un ricoprimento aperto di $\hat{X}$. Per qualche α_0 deve essere $A_{\alpha_0} \ni \infty$, e dunque $\complement_{\hat{X}} A_{\alpha_0}$ chiuso e compatto in X. Essendo quest'ultimo compatto, vi è un numero finito di aperti di $\mathcal{U}$ che lo ricoprono; siano essi $A_{\alpha_1}, \ldots, A_{\alpha_k}$. Allora $\{A_{\alpha_0}, A_{\alpha_1}, \ldots, A_{\alpha_k}\}$ costituisce un sottoricoprimento finito del ricoprimento $\mathcal{U}$ di $\hat{X}$. Ne segue la compattezza di $(\hat{X}, \hat{\tau})$.

Per finire ...

Esercizio Dimostrare che la compattificazione di Alexandroff di $(\mathbb{R}^n, \mathcal{E})$ è omeomorfa alla sfera

$$S^n = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1},\ x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\},$$

con la topologia euclidea indotta.

Nella prossima raccolta di slides, relativa a spazi topologici quozienti, incontreremo un'altra compattificazione di $\mathbb{R}^n$, già nota dal corso di Geometria I: lo spazio proiettivo $P^n(\mathbb{R})$.

Si tratta di una compattificazione ottenuta per $n = 1$ aggiungendo il solo punto all'infinito della retta affine (e in questo caso è la compattificazione di Alexandroff), ma per $n \geq 2$ aggiungendo gli infiniti punti dell'iperpiano all'infinito dello spazio affine $\mathbb{R}^n$. In ogni caso

$$i : \mathbb{R}^n \hookrightarrow P^n(\mathbb{R})$$

è un omeomorfismo sull'immagine, che risulta densa in $P^n(\mathbb{R})$. Inoltre $P^n(\mathbb{R})$ è compatto.