

Curvatura di superfici in \mathbb{R}^3

Definizioni e formule di calcolo

P. Piccinni

Corso di Geometria II (A-L), a.a. 2019-20
Laurea Triennale in Matematica
Sapienza Università di Roma Classroom - codice 24bsdao

Lezione del 12 maggio 2020, durata 2 ore
Lezione del 19 maggio 2020, durata 2 ore

1 Applicazione di Gauss

- Un'osservazione sulle curve piane
- L'applicazione di Gauss $g : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow S^2$
- Definizione provvisoria di curvatura gaussiana
- Verso il differenziale dg_p
- Il differenziale dg_p
- L'operatore dg_p di Weingarten
- dg_p operatore autoaggiunto

2 Invarianti di dg_p , curvatures e la seconda forma fondamentale

- dg_p e il teorema spettrale
- La seconda forma fondamentale
- I coefficienti e, f, g della seconda forma fondamentale
- Classificazione dei punti
- Formule utili per e, f, g
- Ancora E, F, G, e, f, g
- La matrice A di dg_p
- La matrice A e i coefficienti E, F, G, e, f, g

3 Formule di calcolo

- Curvatura media e gaussiana
- Curvature principali
- Esercizio
- Risposte e commenti: piano, cilindro, sfera
- Risposte e commenti: elicoide
- Risposte e commenti: catenoide
- Risposte e commenti: toro

Curvatura delle curve piane

Prima di iniziare lo studio della curvatura delle superfici S di \mathbb{R}^3 , facciamo un passo indietro alle curve piane. Vi propongo un esercizio guidato, che raccomando di svolgere prima di proseguire.

Sia C una curva piana, parametrizzata con l'ascissa curvilinea: $x = x(s), y = y(s)$.

Ricordiamo che $\mathbf{t} = (\dot{x}, \dot{y})$ è il vettore tangente e $k_C = \|\dot{\mathbf{t}}\| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}$ è la curvatura. Consideriamo la seguente applicazione

$$g : C \rightarrow S^1, \quad g(p) = \mathbf{t}(p) \in S^1$$

che associa ad ogni punto $p \in C$ il vettore tangente $\mathbf{t}(p)$ che, applicato nell'origine di \mathbb{R}^2 , individua con il suo estremo libero il punto $g(p)$ della circonferenza unitaria S^1 .

Osserviamo che quando p percorre sulla curva C l'arco $\widehat{pp_1}$, si ottiene sulla circonferenza unitaria l'arco $\widehat{g(p)g(p_1)}$. Con gli stessi simboli $\widehat{pp_1}$ e $\widehat{g(p)g(p_1)}$ indichiamo la lunghezza degli stessi archi, rispettivamente su C e su S^1 .

Esercizio. Dimostrare che la curvatura $k_C(p)$ della curva C nel punto p può ottenersi come:

$$k_C(p) = \lim_{p_1 \rightarrow p} \frac{\widehat{g(p)g(p_1)}}{\widehat{pp_1}} = \lim_{p_1 \rightarrow p} \frac{\text{arco su } S^1}{\text{arco su } C}$$

Curvatura e l'applicazione $g : C \rightarrow S^1$

Diamo qualche suggerimento per il precedente Esercizio. La definizione di $k_C(p)$ è:

$$k_C(p) = \left\| \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right\|_p = \lim_{p_1 \rightarrow p} \frac{\|\mathbf{t}(p_1) - \mathbf{t}(p)\|}{\widehat{\text{arco } pp_1}}$$

Si osservi ora che il numeratore $\|\mathbf{t}(p_1) - \mathbf{t}(p)\|$ dell'ultima frazione, modulo del vettore differenza, è la base di un triangolo isoscele di lati obliqui $\|\mathbf{t}(p_1)\| = \|\mathbf{t}(p)\| = 1$. Per evidenti motivi trigonometrici

$$\|\mathbf{t}(p_1) - \mathbf{t}(p)\| = 2 \sin \frac{\theta}{2},$$

dove θ è l'angolo tra i due lati obliqui. Ma θ è anche la lunghezza dell'arco $\widehat{g(p)g(p_1)}$, dato che la circonferenza S^1 ha raggio 1. Ma quando $p_1 \rightarrow p$, risulta che $\theta \rightarrow 0$. Inoltre tutti sappiamo bene che $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$. Lascio ora a voi di concludere, deducendo la formula della curvatura scritta nell'enunciato dell'esercizio.

Avete concluso l'esercizio? Bene! Allora ora vi è chiaro che la nozione di curvatura (di una curva piana C) può dedursi dal confronto tra la lunghezza di un arco su C e la corrispondente lunghezza d'arco su S^1 . La circonferenza S^1 appare dunque come curva di riferimento per la nozione di curvatura. Prendendo ispirazione da quanto si dirà per le superfici $S \subset \mathbb{R}^3$ a partire dalla prossima slide, possiamo chiamare l'applicazione $g : C \rightarrow S^1$, che compare nell'esercizio appena svolto, l'*applicazione di Gauss* della curva C .

Definizione

La teoria della curvatura delle superfici iniziò ad essere oggetto di indagine nel XVIII secolo, prendendo in esame la curvatura di varie curve che è naturale considerare sulla superficie (p es. le sezioni normali). In questo ambito furono in particolare ottenuti due notevoli risultati: il teorema di Meusnier e la formula di Eulero, che incontreremo nel file successivo.

Nel 1827 Gauss nelle sue "*Disquisitiones generales circa superficies curvas*" seguì un approccio diverso, cui oggi si fa abitualmente riferimento, e che come vedremo porta assai lontano. L'idea di base è l'*applicazione di Gauss* della superficie, che ora definiamo.

Definizione. Sia S una superficie di \mathbb{R}^3 , parametrizzata da $\alpha : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$, e al solito siano (u, v) coordinate cartesiane in U , che attraverso α sono parametri su S .

Si dice **applicazione di Gauss** di S l'applicazione

$$g : S \rightarrow S^2, \quad g(p) = \mathbf{N}(p) \in S^2$$

che associa ad ogni punto $p \in S$ il versore normale della superficie nel punto p , ovvero:

$$\mathbf{N}(p) = \frac{\alpha_u \wedge \alpha_v}{\|\alpha_u \wedge \alpha_v\|} \Big|_p$$

che, applicato nell'origine di \mathbb{R}^3 individua con il suo estremo libero il punto $g(p)$ della sfera unitaria S^2 .

Limite del rapporto tra aree

Possiamo ora formulare l'idea (o definizione provvisoria) di *curvatura gaussiana* $K(p)$ in un punto p di una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$. Ciò è dato dalla seguente formula, anche ispirata da quanto visto nella prima slide:

$$K(p) = \lim_{\text{Area } R \rightarrow 0} \frac{\text{Area } g(R)}{\text{Area } R}$$

dove R è una regione limitata contenente p al suo interno, e il limite è inteso su una successione $\{R_1, \dots, R_n, \dots\}$ di regioni convergenti a p nel senso che ogni disco $D_{r,p}$ in \mathbb{R}^3 e di centro p contiene tutti le R_n con n abbastanza grande. Si assume sempre $\text{Area } R > 0$, mentre si assume $\text{Area } g(R)$ positiva o negativa secondo che l'applicazione g conserva o non conserva un'orientazione (oraria o antioraria che sia) attorno al punto $p \in S$.

Esercizio. Usando la precedente definizione (provvisoria) di $K(p)$, verificare:

- Se S è un piano, allora $K \equiv 0$;
- Se S è un cilindro (p. es. $x = r \cos u, y = r \sin u, z = v$, con $r > 0$ fissato), allora $K \equiv 0$;
- Se S è una sfera di raggio r (p. es. $x = r \sin u \cos v, y = r \sin u \sin v, z = r \cos u$), allora

$$K \equiv \frac{1}{r^2}$$

Si noti che in questi tre casi la curvatura gaussiana è costante su S , nulla sul piano e sul cilindro e positiva (inversamente proporzionale al quadrato del raggio) su una sfera di raggio r .

$$dg_p : T_p S \rightarrow T_{g(p)} S^2$$

L'aver svolto il precedente esercizio lascia la (corretta) impressione che i tre casi elencati sono sostanzialmente gli unici in cui si riesce a calcolare la curvatura gaussiana $K(p)$ utilizzando la precedente formula.

Per rendere $K(p)$ calcolabile attraverso derivazioni, dalle equazioni parametriche o da altre rappresentazioni analitiche, di un'arbitraria superficie $S \subset \mathbb{R}^3$, e anche per proseguire nella teoria, conviene **linearizzare** l'applicazione di Gauss g . Ciò significa guardare al suo **differenziale**, l'applicazione lineare $dg_p : T_p S \rightarrow T_{g(p)} S^2$ che meglio approssima l'applicazione di Gauss $g : S \rightarrow S^2$ attorno al punto p .

All'inizio del precedente file "Superfici differenziabili in \mathbb{R}^3 .pdf" abbiamo ricordato (dal corso di Analisi II) la nozione di differenziale in un punto $q \in U$ di un'applicazione differenziabile $\alpha : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Esso è l'applicazione lineare $d\alpha_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ rappresentato nelle basi canoniche di \mathbb{R}^2 e di \mathbb{R}^3 dalla matrice jacobiana di α , calcolata nel punto $q \in U$.

Qui vogliamo invece definire il differenziale dell'applicazione di Gauss $g : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$, e vogliamo che il differenziale in $p \in S$ sia un'applicazione lineare $dg_p : T_p S \rightarrow T_{g(p)} S^2$ tra i piani (vettoriali) tangenti.

Definizione mediante la matrice jacobiana

Ricordiamo la definizione dell'applicazione di Gauss g

$$p = \alpha(q), \quad q = (u, v) \in U \subset \mathbb{R}^2 \quad \Rightarrow \quad g(p) = \mathbf{N}(p) = \mathbf{N}(\alpha(q)) = \mathbf{N}(\alpha(u, v)).$$

È dunque qui naturale riferirsi alla base (α_u, α_v) di $T_p S$, alla base canonica di \mathbb{R}^3 e alla matrice jacobiana dell'applicazione

$$g \circ \alpha : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (g \circ \alpha)(u, v) = \mathbf{N}(u, v).$$

Nelle basi (α_u, α_v) di $T_p S$ e canonica di \mathbb{R}^3 , guardando alle tre componenti del versore normale $\mathbf{N} = (N_x, N_y, N_z)$, la matrice jacobiana che definisce il differenziale

$$dg_p : T_p S \rightarrow T_{g(p)} S^2 \subset \mathbb{R}^3$$

è la seguente:

$$J_p(g) = J_q(g \circ \alpha) = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial N_x}{\partial u} \right|_q & \left. \frac{\partial N_x}{\partial v} \right|_q \\ \left. \frac{\partial N_y}{\partial u} \right|_q & \left. \frac{\partial N_y}{\partial v} \right|_q \\ \left. \frac{\partial N_z}{\partial u} \right|_q & \left. \frac{\partial N_z}{\partial v} \right|_q \end{pmatrix}$$

La parte (relativamente) più impegnativa di questo file è terminata. Ora e per un po' di tempo saremo "in discesa". Leggete però attentamente le due osservazioni, entrambe fondamentali, contenute nella prossima slide.

Due osservazioni

Osservazione 1. Poiché $\mathbf{N}(p)$ è un versore, derivando rispetto a u e rispetto a v l'identità $\langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle \equiv 1$ si ottiene che entrambi i vettori derivati

$$\mathbf{N}_u = \left(\frac{\partial N_x}{\partial u}, \frac{\partial N_y}{\partial u}, \frac{\partial N_z}{\partial u} \right), \quad \mathbf{N}_v = \left(\frac{\partial N_x}{\partial v}, \frac{\partial N_y}{\partial v}, \frac{\partial N_z}{\partial v} \right)$$

sono perpendicolari a \mathbf{N} , e dunque sono paralleli a $T_{g(p)}S^2$. Osserviamo anche che per definizione di dg_p , applicandola agli elementi della base α_u, α_v di T_pS , si ottiene

$$dg_p(\alpha_u) = \mathbf{N}_u, \quad dg_p(\alpha_v) = \mathbf{N}_v$$

Dunque l'immagine di dg_p è contenuta nel piano tangente $T_g(p)S^2 \subset \mathbb{R}^3$.

Osservazione 2. $\mathbf{N}(p)$ è perpendicolare sia a T_pS che a $T_{g(p)}$. Ne segue che i due piani affini tangenti sono paralleli e **come piano vettoriale sono lo stesso**. Pertanto dg_p è un **operatore lineare** sul piano vettoriale T_pS , che è un piano vettoriale euclideo rispetto alla prima forma fondamentale $I_p = \langle \cdot, \cdot \rangle_p$. Possiamo dunque anche scrivere

$$dg_p : T_pS \rightarrow T_pS$$

e in questa accezione dg_p si dice **operatore di Weingarten** o anche **operatore di forma**.

Dimostrazione

Teorema. L'operatore di Weingarten $dg_p : T_p S \rightarrow T_p S$ è autoaggiunto rispetto a $I_p = \langle \cdot, \cdot \rangle_p$. Ovvero, per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_p S$ risulta

$$\langle dg_p(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, dg_p(\mathbf{v}) \rangle .$$

Dimostrazione. Per la linearità di dg_p e la bilinearità di $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è sufficiente dimostrare l'uguaglianza per le quattro possibili scelte di \mathbf{u}, \mathbf{v} elementi della base α_u, α_v . Per le due scelte ripetute l'identità è conseguenza della simmetria di $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Rimane dunque solo da dimostrare che

$$\langle dg_p(\alpha_u), \alpha_v \rangle = \langle \alpha_u, dg_p(\alpha_v) \rangle .$$

Ovvero, poiché $dg_p(\alpha_u) = \mathbf{N}_u$ e $dg_p(\alpha_v) = \mathbf{N}_v$ (cfr. precedente slide) rimane da dimostrare che

$$\langle \mathbf{N}_u, \alpha_v \rangle = \langle \alpha_u, \mathbf{N}_v \rangle .$$

Ma ciò segue subito derivando rispetto a u l'identità $\langle \mathbf{N}, \alpha_v \rangle \equiv 0$, e rispetto a v l'identità $\langle \mathbf{N}, \alpha_u \rangle \equiv 0$. Si ottiene infatti

$$\langle \mathbf{N}_u, \alpha_v \rangle + \langle \mathbf{N}, \alpha_{vu} \rangle \equiv 0 \quad \langle \mathbf{N}_v, \alpha_u \rangle + \langle \mathbf{N}, \alpha_{uv} \rangle \equiv 0 .$$

Quindi:

$$\langle \mathbf{N}_u, \alpha_v \rangle = - \langle \mathbf{N}, \alpha_{vu} \rangle = - \langle \mathbf{N}, \alpha_{uv} \rangle = \langle \mathbf{N}_v, \alpha_u \rangle = \langle \alpha_u, \mathbf{N}_v \rangle .$$

Le definizioni

Possiamo dunque applicare il teorema spettrale dell'algebra lineare all'operatore autoaggiunto di Weingarten $dg_p : T_pS \rightarrow T_pS$.

Ne segue che dg_p ha per ogni $p \in S$ autovalori reali $\lambda_1(p)$ e $\lambda_2(p)$.

Oltre a essi, gli invarianti di dg_p sono la traccia $\text{tr } dg_p = \lambda_1(p) + \lambda_2(p)$ e il determinante $\det dg_p = \lambda_1(p)\lambda_2(p)$.

Il teorema spettrale assicura inoltre per ogni $p \in S$ l'esistenza in T_pS di una base ortonormale $(\mathbf{e}_1(p), \mathbf{e}_2(p))$ di autovettori di dg_p :

$$dg_p(\mathbf{e}_1(p)) = \lambda_1(p)\mathbf{e}_1(p), \quad dg_p(\mathbf{e}_2(p)) = \lambda_2(p)\mathbf{e}_2(p).$$

Definizioni. Al variare del punto $p \in S$:

- $k_1 = -\lambda_1$ e $k_2 = -\lambda_2$ si dicono **curvature principali** nel punto p ;
- $H = \frac{k_1+k_2}{2} = -\frac{1}{2} \text{tr } dg_p$ si dice **curvatura media** nel punto p ;
- $K = k_1k_2 = \det dg_p$ si dice **curvatura gaussiana** nel punto p .
- Se $k_1 \neq k_2$, le rette su T_pS che sono rispettivi autospazi (ortogonali per il teorema spettrale) si dicono **direzioni principali**.

Definizione

Nelle prossime slides indicheremo come sia possibile calcolare le funzioni di curvatura k_1, k_2, H, K partendo dalle equazioni parametriche di una superficie S . Ciò renderà possibile il calcolo anche per superfici grafico di funzioni $z = f(x, y)$ e, attraverso il teorema delle funzioni implicite, anche per superfici rappresentate in forma cartesiana $F(x, y, z) = 0$.

Non solo per questa ragione, ma anche per lo sviluppo della teoria in cui ormai siamo addentro, è di grande importanza la *seconda forma fondamentale* che ora definiamo.

Definizione. Al variare del punto $p \in S$ e per $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_p S$ la famiglia $\mathbb{I} = \{\mathbb{I}_p\}$ di forme bilineari

$$\mathbb{I}_p = - \langle dg_p(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle$$

si dice la **seconda forma fondamentale** di S .

Osserviamo subito che, essendo dg_p autoaggiunto rispetto a $\langle \cdot, \cdot \rangle$, anche la seconda forma fondamentale è una forma bilineare simmetrica sul piano vettoriale $T_p S$. Essa può essere definita positiva, definita negativa, non degenerare, degenerare o anche identicamente nulla. Al pari della famiglia $\{dg_p\}_{p \in S}$ di operatori di Weingarten, la seconda forma fondamentale \mathbb{I} di una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ contiene tutte le informazioni relative alle varie curvature che abbiamo definito su S .

Definizione

Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare parametrizzata con $\alpha(u, v)$. Ricordiamo che utilizzando la base (α_u, α_v) dei suoi piani tangenti $T_p S$, abbiamo utilmente rappresentato la prima forma fondamentale $I_p = \langle \quad, \quad \rangle$ di S con la matrice simmetrica $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ dei suoi coefficienti:

$$E = \langle \alpha_u, \alpha_u \rangle, \quad F = \langle \alpha_u, \alpha_v \rangle, \quad G = \langle \alpha_v, \alpha_v \rangle$$

Analogamente, nella stessa base (α_u, α_v) dei piani tangenti, otteniamo la matrice simmetrica $\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$ della seconda forma fondamentale

$$II_p = - \langle dg_p(\quad), \quad \rangle$$

$$e = - \langle dg_p(\alpha_u), \alpha_u \rangle, \quad f = - \langle dg_p(\alpha_u), \alpha_v \rangle, \quad g = - \langle dg_p(\alpha_v), \alpha_v \rangle$$

Definizioni

Definizioni. Un punto p della superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ si dice:

- *ellittico* se $K(p) > 0$;
- *iperbolico* se $K(p) < 0$;
- *parabolico* se $K(p) = 0$.

Dalla definizione di curvatura gaussiana si vede facilmente che se $p \in S$ è ellittico, allora (localmente) il piano affine tangente $T_p S$ lascia la superficie tutta da una parte. Se invece $p \in S$ è iperbolico, allora la superficie viene localmente attraversata dal piano affine tangente $T_p S$.

Tra le quadriche di \mathbb{R}^3 , sono superfici tutte a punti ellittici: l'ellissoide, l'iperboloide ellittico e il paraboloido ellittico. Sono invece tutte a punti iperbolici l'iperboloide iperbolico e il paraboloido iperbolico. Sono invece tutte a punti parabolici i coni e i cilindri. In generale su una superficie possono coesistere punti dei tre tipi (un esempio è il toro, come vedremo nell'ultima slide).

Definizioni. Un punto p della superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ si dice:

- *planare* se è parabolico e se in esso $e = f = g = 0$;
- *ombelicale* se $k_1(p) = k_2(p)$.

Per i calcoli

Ricordando che

$$dg_p(\alpha_u) = \mathbf{N}_u, \quad dg_p(\alpha_v) = \mathbf{N}_v$$

risulta:

$$e = - \langle \mathbf{N}_u, \alpha_u \rangle = \langle \mathbf{N}, \alpha_{uu} \rangle$$

$$f = - \langle \mathbf{N}_u, \alpha_v \rangle = \langle \mathbf{N}, \alpha_{vu} \rangle$$

$$g = - \langle \mathbf{N}_v, \alpha_v \rangle = \langle \mathbf{N}, \alpha_{vv} \rangle$$

dove nelle uguaglianze a destra si è usata la derivazione rispetto a u e rispetto a v delle identità $\langle \mathbf{N}, \alpha_u \rangle \equiv \langle \mathbf{N}, \alpha_v \rangle \equiv 0$. P. es. risulta

$$0 \equiv \frac{\partial}{\partial u} \langle \mathbf{N}, \alpha_u \rangle = \langle \mathbf{N}_u, \alpha_u \rangle + \langle \mathbf{N}, \alpha_{uu} \rangle .$$

Di fatto, le espressioni più utili per calcolare sono date dai prodotti scalari a destra; dunque

$$e = \langle \mathbf{N}, \alpha_{uu} \rangle, \quad f = \langle \mathbf{N}, \alpha_{uv} \rangle, \quad g = \langle \mathbf{N}, \alpha_{vv} \rangle$$

Riepilogando

Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare parametrizzata con $\alpha(u, v)$.
Utilizzando la base (α_u, α_v) dei suoi piani tangenti $T_p S$, e deducendo il campo di vettori normali (orientati) di S

$$\mathbf{N} = \frac{\alpha_u \wedge \alpha_v}{\|\alpha_u \wedge \alpha_v\|}$$

siamo dunque certamente in grado di calcolare le funzioni coefficienti delle due forme fondamentali:

$$E = \langle \alpha_u, \alpha_u \rangle, \quad F = \langle \alpha_u, \alpha_v \rangle, \quad G = \langle \alpha_v, \alpha_v \rangle$$

$$e = \langle \mathbf{N}, \alpha_{uu} \rangle, \quad f = \langle \mathbf{N}, \alpha_{uv} \rangle, \quad g = \langle \mathbf{N}, \alpha_{vv} \rangle$$

Vogliamo ora capire come le funzioni E, F, G, e, f, g consentono di calcolare tutte le curvatures k_1, k_2, H, K che abbiamo definito per la superficie S .

Per ottenere le curvatures

Ricordiamo che le curvatures k_1, k_2, H, K della superficie S , regolare e parametrizzata da $\alpha(u, v)$, sono definiti attraverso gli invarianti degli operatori autoaggiunti di Weingarten dg_p .

È dunque certamente utile scrivere la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

associata a dg_p nella base (α_u, α_v) di $T_p S$.

Si noti che poiché (α_u, α_v) è generalmente non ortonormale, la matrice A è generalmente non simmetrica. Ricordiamo ancora una volta che

$$dg_p(\alpha_u) = \mathbf{N}_u, \quad dg_p(\alpha_v) = \mathbf{N}_v$$

Dunque

$$\begin{cases} dg_p(\alpha_u) = \mathbf{N}_u = a_{11}\alpha_u + a_{21}\alpha_v \\ dg_p(\alpha_v) = \mathbf{N}_v = a_{12}\alpha_u + a_{22}\alpha_v \end{cases}$$

Ancora per ottenere le curvatures

Eseguendo il prodotto scalare con α_u e con α_v dei due membri delle precedenti uguaglianze otteniamo:

$$\begin{cases} e = - \langle \mathbf{N}_u, \alpha_u \rangle = -a_{11}E - a_{21}F \\ f = - \langle \mathbf{N}_u, \alpha_v \rangle = -a_{11}F - a_{21}G \\ f = - \langle \mathbf{N}_v, \alpha_u \rangle = -a_{12}E - a_{22}F \\ g = - \langle \mathbf{N}_v, \alpha_v \rangle = -a_{12}F - a_{22}G \end{cases}$$

relazioni che possiamo esprimere con il prodotto di matrici

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}$$

Formule

Esplicitando la matrice inversa, otteniamo:

$$a_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \quad a_{12} = \frac{gF - fG}{EG - F^2}$$

$$a_{21} = \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \quad a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2}$$

Consideriamo ora gli invarianti di A , che definiscono le curvatures.

La curvatura media risulta $H = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} dg_p = -\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22})$. Dunque

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}$$

La curvatura gaussiana è invece $K = \det(dg_p) = \det A$. Otteniamo:

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

Formule

Gli autovalori della matrice A sono le soluzioni λ_1, λ_2 dell'equazione caratteristica

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{pmatrix} = \lambda^2 + 2H\lambda + K = 0,$$

essendo $H = -\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22})$ e $K = \det A$.

Da ciò otteniamo subito le curvatures principali $k_1 = -\lambda_1, k_2 = -\lambda_2$

$$k_1, k_2 = H \pm \sqrt{H^2 - K}$$

Osservazione. Sia dalla definizione che dalle formule risulta che le curvatures principali k_1 e k_2 e la loro media aritmetica $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ dipendono dal verso del versore normale \mathbf{N} , e dunque dall'orientazione (locale) definita sulla superficie dall'ordinamento dei parametri (u, v) .

Cambiando orientazione, ovvero l'ordinamento di (u, v) , k_1, k_2 e H cambiano segno.

La curvatura gaussiana invece, prodotto $K = k_1 k_2$, non dipende dall'orientazione.

Piano, cilindro, sfera, elicoide, catenoide, toro

Esercizio (calcolo di curvatures)

Calcolare i coefficienti E, F, G, e, f, g delle due forme fondamentali e le curvatures H, K, k_1, k_2 per le seguenti superfici.

- **Piano:** $\alpha(u, v) = (u, v, 0)$.
- **Cilindro:** $\alpha(u, v) = (r \cos u, r \sin u, v)$; $r > 0$ fissato.
- **Sfera:** $\alpha(u, v) = (r \sin u \cos v, r \sin u \sin v, r \cos u)$; $r > 0$ fissato.
- **Elicoide:** $\beta(u, v) = (\sin u \sinh v, \cos u \sinh v, u)$
- **Catenoide:** $\gamma(u, v) = (\cos u \cosh v, -\sin u \cosh v, v)$
- **Toro:** $\alpha(u, v) = ((a + r \cos u) \cos v, (a + r \cos u) \sin v, r \sin u)$;
 $0 < r < a$ fissati.

Piano, cilindro, sfera

Risposte e commenti

- **Piano:** $E \equiv G \equiv 1, F \equiv 0; e \equiv f \equiv g \equiv 0; H \equiv K \equiv k_1 \equiv k_2 \equiv 0.$

Teorema di Pitagora infinitesimale euclideo: $ds^2 = du^2 + dv^2.$

Annullamento di tutte le curvatures (tutti i punti sono planari).

- **Cilindro:** $E \equiv r^2, F \equiv 0, G \equiv 1; e \equiv -r, f \equiv g \equiv 0; H \equiv -\frac{1}{2r}, K \equiv 0, k_1 \equiv -\frac{1}{r}, k_2 \equiv 0.$

Per $r = 1$ ancora teorema di Pitagora infinitesimale euclideo: $ds^2 = du^2 + dv^2$; altrimenti dilatazione delle lunghezze solo in orizzontale e in proporzione con il raggio r .

Annullamento della curvatura gaussiana K , dunque superficie tutta a punti parabolici.

La curvatura principale $k_2 = 0$ corrisponde alle rette generatrici del cilindro, che costituiscono una delle direzioni principali.

L'altra curvatura principale $k_1 \equiv -\frac{1}{r}$ (il cui segno dipende dall'orientazione prescelta) corrisponde invece alle circonferenze, che costituiscono l'altra direzione principale.

- **Sfera:** $E \equiv r^2, F \equiv 0, G = r^2 \sin^2 u; e \equiv -r, f \equiv 0, g = -r \sin^2 u; H \equiv -\frac{1}{r}, K \equiv \frac{1}{r^2}, k_1 \equiv k_2 \equiv -\frac{1}{r}.$

Per ogni $r > 0$, teorema di Pitagora infinitesimale non euclideo: $ds^2 = r^2(du^2 + \sin^2 u dv^2).$

Tutte le curvatures sono costanti. Curvatura gaussiana $K \equiv \frac{1}{r^2}$ costante positiva,

inversamente proporzionale a r^2 . Tutti i punti ellittici ($K > 0$) e ombelicali ($k_1 = k_2$).

Elicoide

Risposte e commenti

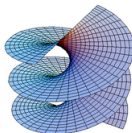


Figura 1 (da WikiCommons)

● Elicoide:

$$E = \cosh^2 v = G, F \equiv 0; \quad e \equiv 0 \equiv g, f \equiv -1; \quad H \equiv 0, K = -\frac{1}{\cosh^4 v}, k_1 = -\frac{1}{\cosh^2 v}, k_2 = \frac{1}{\cosh^2 v}.$$

Teorema di Pitagora infinitesimale conforme $ds^2 = \cosh^2 v(du^2 + dv^2)$, dove la funzione $\cosh^2 v$ è il fattore che rende ds^2 conforme a quello euclideo; quando in ogni punto è $E = G, F = 0$, i parametri (u, v) si dicono *conformi*.

È una superficie rigata (ovvero contenente rette, visibili nella figura). Un'equivalente rappresentazione parametrica (usata p. es. nel video 7 del Prof. Arezzo) è $\alpha(u, t) = (t \sin u, t \cos u, u)$ e si passa alla nostra $\beta(u, v)$ attraverso la funzione monotona crescente $t = \sinh v$. I parametri (u, t) hanno il vantaggio di rendere evidente la presenza di rette, dato che t appare linearmente. I parametri (u, v) hanno invece il vantaggio di essere conformi.

Risulta $H \equiv 0$, condizione che definisce le *superfici minime*. L'elicoide è dunque una superficie minima, tutta a punti iperbolici.

Sottoesercizio. Verificare che $\beta(u, v)$ è una funzione vettoriale *armonica*, ovvero che $\Delta\beta \equiv 0$, dove $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$ è l'operatore di Laplace.

Catenoide

Risposte e commenti

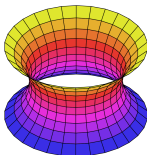


Figura 2 (da WikiCommons)

● Catenoide:

$$E = \cosh^2 v = G, F \equiv 0; \quad e \equiv 1, f \equiv 0, g \equiv -1; \quad H \equiv 0, K = -\frac{1}{\cosh^4 v}, k_1 = -\frac{1}{\cosh^2 v}, k_2 = \frac{1}{\cosh^2 v}.$$

Ancora teorema di Pitagora infinitesimale conforme $ds^2 = \cosh^2 v(du^2 + dv^2)$, e parametri (u, v) conformi.

È una superficie di rotazione (con meridiano la catenaria $x = \cosh z$). Si noti che le funzioni E, F, G (e tutte le funzioni di curvatura) sono le stesse dell'elicoide. L'uguaglianza tra le due terne (E, F, G) mostra che si tratta di superfici *localmente isometriche*. Si noti tuttavia che esse non sono omeomorfe: l'elicoide è semplicemente connesso, il catenoide no. Anche il catenoide è una superficie minima ($H \equiv 0$), tutta a punti iperbolici.

Sottoesercizio. Verificare che anche $\gamma(u, v)$, come la $\beta(u, v)$ dell'elicoide, è una funzione vettoriale *armonica*.

Verificare quindi che le funzioni armoniche $\beta(u, v)$ e $\gamma(u, v)$ sono armoniche coniugate, ovvero verificano le seguenti

condizioni di Cauchy-Riemann: $\beta_u = \gamma_v, \beta_v = -\gamma_u$. Ne segue che la funzione vettoriale complessa

$\delta(u, v) = \beta(u, v) + i\gamma(u, v)$ è olomorfa. Essendo in entrambi i casi (u, v) parametri conformi, si dice che elicoide e

catenoide sono *superfici minime coniugate*.

Toro

Risposte e commenti

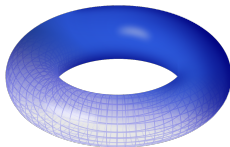


Figura 3 (da WikiCommons)

● **Toro:**

$$E \equiv r^2, F \equiv 0, G = (a + r \cos u)^2; \quad e \equiv r, f \equiv 0, g = \cos u(a + r \cos u); \quad K = \frac{\cos u}{r(a + r \cos u)}.$$

Abbiamo qui la presenza di punti ellittici (parte esterna del toro), parabolici (le due circonferenze di quota massima e minima), e iperbolici (parte interna del toro).

Sottoesercizio. Si verifichi che la distribuzione sul toro dei punti ellittici ($K > 0$) e di punti iperbolici ($K < 0$) è tale che il "valor medio" della curvatura gaussiana del toro è nulla. Ciò significa che, detto $dA = \sqrt{EG - F^2} du dv$ l'elemento d'area del toro, risulta:

$$\iint_{\text{toro}} K dA = 0.$$

Questo è coerente con il *teorema di Gauss-Bonnet* (cfr. p. es. libro di Abate-Tovena, p. 322), dato che la caratteristica di Eulero del toro è zero.