Prodotti topologici

P. Piccinni

Corso di Geometria II (A-L), a.a. 2019-20
Laurea Triennale in Matematica
Sapienza Università di Roma Classroom - codice 24bsdao

Lezione del 12 marzo 2020, durata 2 ore

Indice

Continuità delle proiezioni

Siano (X_1, τ_1) e (X_2, τ_2) spazi topologici, sia $X_1 \times X_2$ l'insieme prodotto cartesiano, e siano

$$\pi_1 : X_1 \times X_2 \to X_1, \qquad \pi_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$$

le proiezioni sui due spazi fattori. Osserviamo che sull'insieme $X_1 \times X_2$ esistono certamente topologie che rendono continue le proiezioni π_1 e π_2. Per esempio la topologia discreta, che rende continua qualunque applicazione che da essa parta.

Proposizione. Tra le topologie su $X_1 \times X_2$ che rendono continue le proiezioni π_1 e π_2 ve ne è una meno fine di tutte. Essa è la topologia prodotto, che ha per base la famiglia

$$\mathcal{B} = \{A_1 \times A_2,\ A_1 \in \tau_1, A_2 \in \tau_2\}$$

La verifica che la famiglia $\mathcal{B}$ soddisfa le proprietà B1 e B2 caratteristiche delle basi di una topologia è immediata.

Caratterizzazione e notazioni

D'altra parte ogni topologia su $X_1 \times X_2$ che renda continua sia π_1 che π_2 deve contenere le controimmagini

$$\pi_1^{-1}(A_1) = A_1 \times X_2, \qquad \pi_2^{-1}(A_2) = X_1 \times A_2,$$

che possiamo chiamare *strisce aperte verticali* e *orizzontali*. Deve pertanto contenere anche le loro intersezioni, che costituiscono appunto la base $\mathcal{B}$.

Indicheremo con $\tau = \tau_1 \times \tau_2$ la topologia prodotto. Dunque

$$(X_1 \times X_2, \tau) = (X_1 \times X_2, \tau_1 \times \tau_2)$$

denota lo spazio topologico prodotto.

Proprietà della topologia prodotto

Valgono le seguenti proprietà.
Le dimostrazioni sono tutte più o meno immediate; i dettagli sul libro di Sernesi.

- Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ basi delle topologie τ_1 e τ_2. Allora

  $$\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 = \{B_1 \times B_2;\ B_1 \in \mathcal{B}_1, B_2 \in \mathcal{B}_2\}$$

  è una base di $\tau = \tau_1 \times \tau_2$.

- Se S_1 e S_2 sono sottospazi topologici risp. di (X_1, τ_1) e di (X_2, τ_2), allora su $S_1 \times S_2$ le seguenti topologie coincidono:

  $$\tau_1|_{S_1} \times \tau_2|_{S_2} = (\tau_1 \times \tau_2)|_{S_1 \times S_2}.$$

π_1 e π_2 sono aperte

Definizione. Un'applicazione $f : X \to Y$ tra spazi topologici si dice *aperta* se porta aperti di X in aperti di Y.

Si noti che molte applicazioni continue non sono aperte. P. es. non è aperta (in generale) l'applicazione continua $i : S \hookrightarrow X$ di inclusione di un sottospazio. D'altra parte, un'applicazione aperta può non essere continua; p. es. se Y ha la topologia discreta, ogni $f : X \to Y$ è aperta, ma non necessariamente continua.

Proposizione. Le proiezioni sui fattori

$$\pi_1 : X_1 \times X_2 \to X_1, \qquad \pi_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$$

sono (oltre che continue) applicazioni aperte.

Dimostrazione. Sia $A \subset X_1 \times X_2$ aperto. Allora

$$A = \bigcup_{i \in I} (A_1^i \times A_2^i),$$

essendo gli A_1^i e A_2^i aperti risp. in X_1 e in X_2. Si ottengono quindi gli aperti, risp. di X_1 e di X_2:

$$\pi_1(A) = \bigcup_{i \in I} \pi_1(A_1^i \times A_2^i) = \bigcup_{i \in I} (A_1^i), \qquad \pi_2(A) = \bigcup_{i \in I} \pi_2(A_1^i \times A_2^i) = \bigcup_{i \in I} (A_2^i).$$

$f : Y \to X_1 \times X_2$

Proposizione. Siano Y, X_1, X_2 spazi topologici e sia $f : Y \to X_1 \times X_2$ un'applicazione. Allora f è continua se e solo se lo sono le "funzioni componenti" $f_1 = \pi_1 \circ f : Y \to X_1$ e $f_2 = \pi_2 \circ f : Y \to X_2$.

Dimostrazione. Se f è continua, lo sono f_1 e f_2, composizioni di f con le proiezioni π_1 e π_2, che sono continue.
Viceversa, siano A_1 e A_2 aperti risp. in X_1 e in X_2 , e assumiamo che f_1 e f_2 siano continue. Allora sono aperti in Y i seguenti sottoinsiemi:

$$f_1^{-1}(A_1) = (\pi_1 \circ f)^{-1}(A_1) = f^{-1}\big((\pi_1)^{-1}(A_1)\big) = f^{-1}(A_1 \times X_2),$$
$$f_2^{-1}(A_2) = (\pi_2 \circ f)^{-1}(A_2) = f^{-1}\big((\pi_2)^{-1}(A_2)\big) = f^{-1}(X_1 \times A_2).$$

Pertanto lo è anche la loro intersezione

$$f^{-1}(A_1 \times X_2) \cap f^{-1}(X_1 \times A_2) = f^{-1}(A_1 \times A_2),$$

e ne segue che f è continua.

Esempio standard su $\mathbb{R}^2$

Per dare un'idea della ricchezza di esempi che la costruzione del prodotto può darci limitiamoci alla scelta $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$, e ricordiamo che abbiamo definito su $\mathbb{R}$ le seguenti nove topologie

$$(\mathbb{R}, \mathcal{E}),\ (\mathbb{R}, j_d),\ (\mathbb{R}, j_s),\ (\mathbb{R}, \tau_{ban}),\ (\mathbb{R}, \tau_{discr}),\ (\mathbb{R}, i_d),\ (\mathbb{R}, i_s),\ (\mathbb{R}, \mathcal{Z}),\ (\mathbb{R}, k),$$

(e naturamente moltre altre scelte sono possibili).
Dunque le combinazione a coppie di tali nove topologie su $\mathbb{R}$ fornisce per prodotto $9^2 = 81$ topologie su $\mathbb{R}^2$.

Una di queste è naturalmente la topologia euclidea

$$(\mathbb{R}^2, \mathcal{E}) = (\mathbb{R}, \mathcal{E}) \times (\mathbb{R}, \mathcal{E}),$$

usualmente definita usando la base dei dischi aperti $D_r(x)$ euclidei.
La base per realizzarla come prodotto sono i "rettangoli aperti" $(a, b) \times (c, d)$, con lati gli intervalli aperti dei due fattori.

Un altro esempio su $\mathbb{R}^2$

Un altro possibile prodotto, e precisamente

$$(\mathbb{R}^2, \text{"order topology"}) = (\mathbb{R}, \tau_{discr}) \times (\mathbb{R}, \mathcal{E})$$

è stato preso in considerazione in relazione alla order topology di $\mathbb{R}^2$, che ha per base i cosiddetti "intervalli" del seguente ordinamento lessicografico di $\mathbb{R}^2$:

$$(x_1, y_1) < (x_2, y_2) \text{ se e solo se } x_1 < x_2 \text{ oppure } x_1 = x_2, y_1 < y_2.$$

Nelle lezione n. 2 del Prof. Zimmermann (cfr. anche Foglio n.1 di esercizi) si è visto perché tale "order topology" di $\mathbb{R}^2$ coincida con il prodotto delle due topologie discreta τ_{discr} e euclidea $\mathcal{E}$ sulle due rette fattori del piano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Esercizio. Stabilire se il prodotto topologico $(\mathbb{R}, \mathcal{Z}) \times (\mathbb{R}, \mathcal{Z})$, di due copie di $\mathbb{R}$ entrambe con la topologia cofinita, fornisce su $\mathbb{R}^2$ la topologia di Zariski, cfr. Appunti Prof. Bravi.

Definizione

Nella definizione di prodotto topologico è implicita la seguente nozione.

Definizione. Una *sottobase* per una topologia τ su X è una famiglia $\mathcal{S} = \{S_i\}$ di aperti di τ tale che le intersezioni finite di elementi di $\mathcal{S}$ costituiscano una base $\mathcal{B}$ per la topologia τ.

L'esempio di sottobase che interviene nella costruzione del prodotto topologico $(X_1 \times X_2, \tau) = (X_1 \times X_2, \tau_1 \times \tau_2)$ è costituito dalla famiglia

$$\mathcal{S} = \{A_1 \times X_2\}_{A_1 \in \tau_1} \cup \{X_1 \times A_2\}_{A_2 \in \tau_2}$$

unione di tutte le strisce aperte verticali e orizzontali. La base usata per definire la topologia prodotto è infatti data da loro intersezioni "a coppie strisce verticale e orizzontale".
Una formula alternativa per definire la sottobase $\mathcal{S}$ è la seguente:

$$\mathcal{S} = \{\pi_1^{-1}(A_1)\}_{A_1 \in \tau_1} \cup \{\pi_2^{-1}(A_2)\}_{A_2 \in \tau_2}$$

$(X_1 \times \cdots \times X_n, \tau_1 \times \cdots \times \tau_n)$

È chiaro ora come si può procedere per definire il prodotto topologico di n spazi topologici $(X_1, \tau_1) \ldots, (X_n, \tau_n)$. Si considerino le n proiezioni sui fattori dell'insieme prodotto cartesiano $(i = 1, \ldots, n)$

$$\pi_i : X_1 \times \cdots \times X_n \to X_i.$$

La famiglia

$$\mathcal{S} = \bigcup_{i=1,\ldots,n} \{\pi_i^{-1}(A_i)\}_{A_i \in \tau_i}$$

delle "strisce aperte" risulta essere sottobase di una topologia. Infatti le intersezioni finite di elementi di $\mathcal{S}$ costituiscono la famiglia

$$\mathcal{B} = \{A_1 \times \cdots \times A_n\}_{A_1 \in \tau_1, \ldots, A_n \in \tau_n},$$

ed essa verifica le proprietà B1 e B2 caratteristiche delle basi per una topologia. La topologia $\tau = \tau_1 \times \ldots \tau_n$ generata da $\mathcal{B}$ si dice dunque *topologia prodotto* su $X_1 \times \cdots \times X_n$.

Definizione

Sia J un insieme (finito o infinito), e sia

$$\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$$

una famiglia di insiemi indicizzata dall'insieme J. Ricordiamo che l'insieme della applicazioni

$$\prod_{\alpha\in J} X_\alpha = \{f : J \to \bigcup_{\alpha\in J} X_\alpha,\ f(\alpha)\in X_\alpha\}$$

si dice *prodotto cartesiano* della famiglia $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$.
Se su ogni insieme X_α è assegnata una topologia τ_α definiamo *topologia prodotto* su $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ la meno fine tra tutte le topologie che rendono continue tutte le proiezioni

$$\pi_\alpha : \prod_{\alpha\in J} X_\alpha \to X_\alpha$$

sugli spazi fattori. Denotiamo con $\tau = \prod_{\alpha\in J}\tau_\alpha$ tale topologia prodotto.

Costruzione

Dunque per definizione la topologia prodotto

$$\Big(\prod_{\alpha\in J} X_\alpha, \prod_{\alpha\in J} \tau_\alpha\Big)$$

ha per sottobase la famiglia delle controimmagini

$$(\pi_\alpha)^{-1}(A_\alpha) \subset \prod_{\alpha\in J} X_\alpha, \quad A_\alpha \in \tau_\alpha.$$

Ne segue che una base della topologia prodotto $\prod_{\alpha\in J}\tau_\alpha$ è data dalle intersezioni <u>finite</u> di elementi di tale sottobase, ovvero dai prodotti di aperti

$$\prod_{\alpha\in J} A_\alpha \quad A_\alpha \in \tau_\alpha,$$

dove <u>tutti</u> gli A_α, <u>salvo un numero finito, coincidono con gli</u> X_α.

Proprietà

Osserviamo che, in analogia con quanto visto sopra per il prodotto di due fattori, vale la seguente

Proposizione. Siano Y, X_α spazi topologici con $\alpha \in J$, e sia $f : Y \to \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ un'applicazione. Allora f è continua se e solo se lo sono le "funzioni componenti" $f_\alpha = \pi_\alpha \circ f : Y \to X_\alpha$, per ogni $\alpha \in J$.

La dimostrazione va in parallelo con quella di due fattori (cfr. una delle slides precedenti).
La continuità di f implica, per composizione con le applicazioni (continue) π_α di proiezione, quella delle $f_\alpha = \pi_\alpha \circ f$.
Viceversa, se le f_α sono continue, abbiamo che per ogni $\alpha \in J$ e per ogni aperto A_α in X_α, risulta aperto in Y il sottoinsieme:

$$f_\alpha^{-1}(A_\alpha) = (\pi_\alpha \circ f)^{-1}(A_\alpha) = f^{-1}\big((\pi_\alpha)^{-1}(A_\alpha)\big).$$

Quest'ultimo risulta essere la controimmagine, mediante f, di una striscia aperta del prodotto.

In tale striscia aperta, tutti gli aperti fattori sono gli interi X_β, salvo il fattore A_α per $\beta = \alpha$.

Ciò è sufficiente per concludere, in considerazione del fatto che una base del prodotto è costituita dalle intersezioni finite delle strisce considerate, che f è continua.

Box topology, più fine della topologia prodotto

Vi è un'altra topologia sul prodotto cartesiano $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ degli insiemi sostegno $\{X_\alpha\}_{\alpha\in J}$ di una famiglia di spazi topologici.
Essa è definita assumendo come base la famiglia

$$\mathcal{B} = \{\prod_{\alpha\in J} A_\alpha \quad A_\alpha \in \tau_\alpha\},$$

dei prodotti di aperti degli spazi fattori (senza la clausola che gli A_α, salvo un numero finito, debbano essere gli interi X_α). È immediato che la famiglia $\mathcal{B}$ verifica le proprietà B1 e B2 caratteristiche delle basi di una topologia.
La topologia generata da tale $\mathcal{B}$ si chiama la *box topology* τ_{box} sul prodotto cartesiano $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$. È chiaro per costruzione che

$$\prod_{\alpha\in J} \tau_\alpha < \tau_{box},$$

ovvero la topologia prodotto su $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ è meno fine della box topology.

Box topology, qualche proprietà

Riguardo al fatto che la topologia prodotto su $\prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ è meno fine della box topology, si ricordi che la topologia prodotto è la meno fine tra tutte le topologie che rendano continue tutte le proiezioni. Si osservi che la continuità delle proiezioni vale anche per la box topology.

Qualche osservazione.

- Per prodotti finiti, la topologia prodotto e la box topology coincidono.
- La box topology può apparire una scelta più naturale (in essa infatti tutti i prodotti di aperti sono aperti).
- In realtà la topologia prodotto è decisamente più interessante e generalmente preferibile. Due argomenti vengono dati
  - i) nella prossima slide;
  - ii) dal teorema di Tychonoff (che probabilmente non dimostreremo):

X_α compatti $\Rightarrow$ $\prod X_\alpha$ compatto nella topologia prodotto (ma non nella box topology).

Box topology: f_α cont $\not\Rightarrow$ f continua

Mostriamo con un controesempio che scegliendo la box topology

$$[f_\alpha = \pi_\alpha \circ f : Y \to X_\alpha \text{ continue}] \quad \not\Rightarrow \quad [f : Y \to \prod X_\alpha \text{ continua}].$$

Siano $Y = X_\alpha = \mathbb{R}$ con la topologia euclidea, e consideriamo un prodotto numerabile, dunque $J = \mathbb{N}$. Osserviamo che

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \prod_{\alpha \in \mathbb{N}} X_\alpha$$

è l'insieme delle successioni $\{x_n\}$ di numeri reali. Definiamo

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \qquad f(t) = (t, t, t, t, t, \dots)$$

e osserviamo che ogni f_α è l'identità, dunque continua. Scegliendo su $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'aperto della box topology

$$A = \prod_{n \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right),$$

risulta $f^{-1}(A) = \{0\}$, che non è aperto in $\mathbb{R}$. Dunque f non è continua.