Sottospazi topologici

P. Piccinni

Corso di Geometria II (A-L), a.a. 2019-20
Laurea Triennale in Matematica
Sapienza Università di Roma Classroom - codice 24bsdao

Lezione del 10 marzo 2020, durata 2 ore

Indice

Richiami e qualche altra nozione sui sottoinsiemi

Nella precedente raccolta di slides "Applicazioni continue e sottoinsiemi" abbiamo visto come, in uno spazio topologico (X, τ), la topologia τ associ ad ogni sottoinsieme $S \subset X$ altri sottoinsiemi di X; in primo luogo i tre che costituiscono la *tripartizione* di X:

$$X = \; Int\, S \; \cup \; Est\, S \; \cup \; Fr\, S,$$

ovvero la *parte interna*, la *parte esterna*, e la *frontiera* di S.

Poi la *chiusura* $\overline{S} = S \cup \; Fr\, S$ di S. A questi possiamo aggiungere

$$D(S) = \{x \in X \text{ tali che ogni } U_x \in \mathcal{N}(x) \text{ interseca } S \text{ in punti diversi da } x\}.$$

$D(S)$ di chiama il *derivato* di S e i sui punti si chiamano *punti di accumulazione* di S (ovvero 'limit points', nelle lezioni del Prof. Zimmermann).
Si osservi, che come i punti aderenti a S (ovvero i punti della chiusura $\overline{S}$), anche i punti di accumulazione possono o no appartenere ad S.

Un punto di S che non sia di accumulazione si dice *punto isolato* di S.

Torniamo ai precedenti esempi...

Esercizio. Determinare, per ognuno dei seguenti (X, τ) e ognuno dei seguenti S, la chiusura, il derivato, e i punti isolati:

i) $(X, \tau) = (\mathbb{R}; \mathcal{E})$, $S = [0, 1]$;

ii) $(X, \tau) = (\mathbb{R}; \mathcal{E})$, $S = (0, 1)$;

iii) $(X, \tau) = (\mathbb{R}; \mathcal{E})$, $S = [0, 1)$;

iv) $(X, \tau) = (\mathbb{R}; \mathcal{E})$, $S = \mathbb{Z}$;

v) $(X, \tau) = (\mathbb{R}; \mathcal{E})$, $S = \mathbb{Q}$;

vi) $(X, \tau) = (\mathbb{R}; \mathcal{E})$, $S = \{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Definizione di sottospazio

In quanto precede abbiamo visto some la scelta di un sottoinsieme S in uno spazio topologico (X, τ) consente di dare varie interessanti nozioni. Vogliamo invece ora osservare che su S vi è la seguente naturale topologia.

Proposizione. Siano (X, τ) uno spazio topologico e sia $S \subset X$ un sottoinsieme. La seguente famiglia di sottoinsiemi di S

$$\tau|_S = \{A \cap S, \text{ dove } A \in \tau\}$$

è una topologia su S, detta *topologia indotta su S da* (X, τ).
La coppia $(S, \tau|_S)$ si dice *sottospazio topologico* di (X, τ).

La dimostrazione è pressoché immediata.
Le tre proprietà richieste per gli assiomi di $\tau|_S$ sono infatti subito verificate:
A1. $\emptyset = \emptyset \cap S$, $S = X \cap S$;
A2. $S_i = A_i \cap S \Rightarrow \bigcup_i S_i = \bigcup_i (A_i \cap S) = \left(\bigcup_i A_i\right) \cap S$;
A3. $S_1 = A_1 \cap S,\ S_2 = A_2 \cap S \Rightarrow S_i \cap S_2 = (A_1 \cap S,) \cap (A_2 \cap S) = (A_1 \cap A_2) \cap S$.

La topologia indotta è immagine inversa di $i : S \hookrightarrow X$

Inquadreremo ora la nozione di topologia indotta $\tau|_S$ su un $S \subset X$ di uno spazio topologico X nella più ampia nozione di *topologia immagine inversa*.

Sia Z un insieme, (X, τ) uno spazio topologico, e sia $f :\to X$ un'applicazione tra insiemi.
Osserviamo che su Z esistono certamente delle topologie che rendono continua la f , per esempio la topologia discreta. Essendo infatti in essa ogni sottoinsieme un aperto, tutte le controimmagini mediante f degli aperti di X risultano aperte. Dimostriamo la seguente:

Proposizione. Tra le topologie su Z che rendono continua la f ve ne è una meno fine di tutte. Essa è la topologia immagine inversa, definita così:

$$f^{-1}(\tau) = \{f^{-1}(A),\ A \in \tau\}.$$

Dim. Che $f^{-1}(\tau)$ sia una topologia dipende dalla commutabilità delle operazioni di unione e intersezione rispetto alle controimmagini (segnalata all'inizio del corso). D'altra parte ogni topologia che rende continua la f deve contenere tutte le controimmagini $f^{-1}(A)$, $A \in \tau$.

Proprietà di $f^{-1}(\tau)$

Sia $f : Z$ (insieme) $\to X$ (spazio topologico).
Tutte le seguenti proprietà sono di immediata dimostrazione:

- $F' \subset Z$ è chiuso se e solo se $F' = f^{-1}(F)$ con F chiuso in X.
- Se $\mathcal{B}$ è una base di aperti per τ su X, allora $\mathcal{B}' = \{f^{-1}(B), B \in \mathcal{B}\}$ è una base di aperti per $f^{-1}(\tau)$ su Z.
- U' è un intorno di $z \in Z$ se e solo se esiste un intorno U di $f(z) \in X$ con $U' = f^{-1}(U)$.
- Se $g : W \to Z$, allora $(f \circ g)^{-1}(\tau) = f^{-1}(g^{-1}(\tau))$.

E naturalmente, tornando ai sottospazi, se $S \subset X$ e se

$$i : S \hookrightarrow X$$

è l'inclusione, allora per ogni $\quad A \in \tau \quad$ è $\; i^{-1}(A) = A \cap S$, $\quad$ ovvero:

$$\boxed{\tau|_S = i^{-1}(\tau)}$$

Proprietà di $\tau|_S$

Dunque se $S \subset X$ (spazio topologico), valgono le seguenti proprietà.

- $F' \subset S$ è chiuso in $\tau|_S$ se e solo se $F' = F \cap S$ con F chiuso in X.
- Se $\mathcal{B}$ è una base di aperti per τ su X, allora $\mathcal{B}' = \{B \cap S, B \in \mathcal{B}\}$ è una base di aperti per $\tau|_S$ su S.
- $U' \in \mathcal{N}_S(x)$ se e solo se esiste $U \in \mathcal{N}_X(x)$ con $U' = U \cap S$.
- Se $T \subset S \subset X$, allora $\tau|_T = \big(\tau|_S\big)|_T$.

Esercizio. Sia (X, d) uno spazio metrico, $S \subset X$ e sia $d|_S$ la restrizione della distanza d al sottoinsieme S. Verificare che la topologia $\tau|_{d_S}$, definita su S dalla distanza ristretta d_S, coincide con la topologia $\tau_d|_S$ indotta su S dalla topologia τ_d su X.

Osservazione (non per terrapiattisti). Viviamo più o meno su una superficie sferica $\mathbb{S}^2_r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$. Per misurare la distanza tra due punti P, Q della superficie terrestre, non usiamo tuttavia la restrizione $d|_{\mathbb{S}^2_r}(P, Q)$, che sarebbe la lunghezza del segmento PQ, impraticabile da percorrere.

È invece più naturale e pratico usare la distanza del corso di Analisi II, data dall' inf delle lunghezze delle curve regolari sulla superficie S^2_r e di estremi i punti P e Q. Si può riflettere se anche questi inf definiscano una distanza su $\mathbb{S}^2_r$ e, in caso positivo, se vale l'identità della topologia a essa associata con quella indotta su $\mathbb{S}^2_r$ dall'ambiente $\mathbb{R}^3$.

Aperti di S e aperti di X

Osservazione: Gli aperti di un sottospazio topologico $(S, \tau|_S)$ di (X, τ) non sono in generale aperti di X.
I controesempi che devono venire in mente a questo riguardo sono numerosissimi. Per menzionarne uno: gli intervalli aperti su una retta, sottospazio del piano euclideo, sono aperti della retta, ma non del piano. Ancora, i punti di $\mathbb{Z}$, sottospazio della retta euclidea, sono aperti in $\mathbb{Z}$, ma non nella retta.
In quest'ultimo esempio, la topologia euclidea indotta $\mathcal{E}|_{\mathbb{Z}}$ coincide con la topologia discreta su $\mathbb{Z}$. Si dice pertanto che $\mathbb{Z}$ è *sottospazio discreto* della retta euclidea $\mathbb{R}$.

Lasciamo come esercizio dimostrare la seguente

Proposizione. Condizione necessaria e sufficiente perché ogni aperto del sottospazio $(S, \tau|_S)$ di (X, τ) sia aperto anche in X è che S sia aperto in X.

Solo qualche esempio ...

Naturalmente sono moltissimi gli esempi di sottospazi topologici che possono venire in mente, e quasi sembra che menzionarne qualcuno possa limitare la fantasia di ognuno di noi nel pensarne di interessanti.
Un lungo elenco di sottospazi topologici si trova nel paragrafo "Sottospazi" del libro di Sernesi.

Gli esempi che seguono, tutti sottospazi di $(\mathbb{R}^n, \mathcal{E})$, sono assolutamente standard, e il menzionarli ha la giustificazione di fissarne terminologia e notazioni.

- La n-**sfera** $S^n = \{\vec{x} = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1},\ x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$;
- L' n-**disco aperto** $D^n = \{\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x_1^2 + \cdots + x_n^2 < 1\}$;
- L' n-**disco chiuso** $\overline{D}^n = \{\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$;
- L' n-**emisfero superiore**
  $S^n_+ = \{\vec{x} = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1},\ x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1,\ x_n \geq 0\}$;
- L' n-**emisfero inferiore**
  $S^n_- = \{\vec{x} = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1},\ x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1,\ x_n \leq 0\}$;
- La n-**simplesso** (intervallo, triangolo equilatero, tetraedro, ...)
  $\Delta^n = \{\vec{x} = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1},\ x_0 + \cdots + x_n = 1,\ x_0, \ldots, x_n \geq 0\}$.

Gruppi di matrici

Consideriamo l'insieme $M_n(\mathbb{R})$ delle matrici quadrate $n \times n$ a coefficienti in $\mathbb{R}$, e ricordiamo che vi è una naturale applicazione biunivoca

$$M_n(\mathbb{R}) \longleftrightarrow \mathbb{R}^{n^2}$$

(che è anche un isomorfismo di spazi vettoriali).
Possiamo dunque considerare in $M_n(\mathbb{R})$ qualunque topologia di $\mathbb{R}^{n^2}$, e in particolare la topologia euclidea $\mathcal{E}$.

Poiché ben sappiamo che molti gruppi di trasformazioni di interesse in geometria corrispondono a gruppi moltiplicativi G di matrici, abbiamo su tali gruppi G di matrici la topologia euclidea indotta, che ci permette p. es. di parlare di "intorno" di una data trasformazione. Cfr. esercizi Foglio 2.

Tra i gruppi G contenuti in $M_n(\mathbb{R})$ e più interessanti, menzioniamo:

- Il **gruppo lineare generale** $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}),\ \det A \neq 0\}$;
- Il **gruppo lineare speciale** $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}),\ \det A = 1\}$;
- Il **gruppo ortogonale** $O(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}),\ A^t A = I\}$;
- Il **gruppo speciale ortogonale** $SO(n, \mathbb{R}) = \{A \in O(n, \mathbb{R}),\ \det A = 1\}$.

Definizione a altri esempi

Tutti questi sono *gruppi topologici*. Ciò significa che le operazioni di gruppo

$$(\cdot) : G \times G \to G, \qquad (\ )^{-1} : G \to G,$$

date dalla composizione $(\cdot)$ e dall'inverso $(\ )^{-1}$, sono continue. Si fa qui uso della *topologia prodotto* su $G \times G$.

Ricordando l'isomorfismo di spazi vettoriali reali

$$M_n(\mathbb{C}) \cong M_{2n}(\mathbb{R}) \longleftrightarrow \mathbb{R}^{(2n)^2}$$

abbiamo altri interessanti gruppi topologici. Cfr. esercizi Foglio 2.

- Il **gruppo lineare generale** $GL(n, \mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}),\ \det A \neq 0\}$;
- Il **gruppo lineare speciale** $SL(n, \mathbb{C}) = \{A \in M_n(\mathbb{C}),\ \det A = 1\}$;
- Il **gruppo unitario** $U(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}),\ \bar{A}^t A = I\}$;
- Il **gruppo speciale unitario** $SU(n) = \{A \in U(n),\ \det A = 1\}$.

Un osservazione

Proposizione. Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua di spazi topologici e sia $S \subset X$ un sottospazio. Allora l'applicazione di restrizione

$$f|_S : S \to Y$$

è continua.

Dim. Basta osservare che $f|_S = i \circ f$ dove $i : S \hookrightarrow X$ è l'inclusione. Dunque $f|_S$ ̀composizione di applicazioni continue.

Consideriamo ora $X = S_1 \cup S_2$, e siano

$$f_1 : S_1 \to Y, \qquad f_2 : S_2 \to Y$$

applicazioni continue (rispetto alle topologie indotte su S_1 e S_2 dalla topologia di X), e compatibili nel senso che $f_1|_{S_1 \cap S_2} = f_2|_{S_1 \cap S_2}$. Ci chiediamo se f_1 e f_2 si "incollano" a un'applicazione continua $f : X \to Y$.

Un teorema

La risposta al precedente quesito è generalmente negativa. Un controesempio è fornito dalla nota funzione di Dirichlet

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} f(x) = 1, \text{ se } x \in \mathbb{Q} \\ f(x) = 0, \text{ se } x \in \complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q} \end{cases}$$

che, benché continua sia su $\mathbb{Q}$ che su $\complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$, non lo è in alcun punto di $\mathbb{R}$.

Vale tuttavia il seguente

Teorema (incollamento). Sia $\mathcal{A} = \{A_i\}$ un ricoprimento aperto dello spazio topologico (X, τ), e siano

$$f_i : A_i \to Y$$

applicazioni continue a valori nello spazio topologico Y che verifichino le condizioni di compatibilità $f_i|_{A_i \cap A_j} = f_j|_{A_i \cap A_j}$. Allora $f : X \to Y$, definita da $f(x) = f_i(x)$ se $x \in A_i$, è continua.

Dimostrazione

Il teorema della slide precedente segue subito dalla seguente

Proposizione. Sia A un aperto dello spazio topologico (X, τ), e sia $f : X \to Y$ un'applicazione a valori nello spazio topologico Y tale che la restrizione $f|_A : A \to Y$ sia continua. Allora $f : X \to Y$ è continua in ogni punto $a \in A$.

Dimostrazione della Proposizione. Per ipotesi, per ogni $U \in \mathcal{N}(f(a))$ esiste un $V' \in \mathcal{N}_A(a)$ con $f|_A(V') \subset U$. Ma $V' \in \mathcal{N}_A(a) \Rightarrow V' = V \cap A$ con $V \in \mathcal{N}_X(a)$ (cfr. precedente slide "proprietà di $\tau|_S$"). Poiché $A \in \mathcal{N}_X(a)$, risulta che anche $V' \in \mathcal{N}_X(a)$, e quindi la tesi.