**Cognome: ......................... Nome: ................. Numero di matricola: .........................**

**Corso di Geometria II, a. a. 2018-19**

Prova scritta del 16 settembre 2019

**Norme per le prove in itinere e le prove scritte d'esame**

1. Scrivere subito cognome, nome e numero di matricola su questo foglio.
2. Consegnate solo i fogli che ritenete essere bella copia.
3. **Svolgere gli esercizi con ordine e completezza, motivando ogni risposta. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza.**
4. Durante non si possono utilizzare calcolatrici o telefoni cellulari.
5. La durata della prova è di **3 ore**. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

**1.** Su $I = [0, a] \subset \mathbb{R}$, dotato della topologia euclidea indotta, si consideri la relazione di equivalenza

$$x \sim y \Longleftrightarrow x = y \quad \textit{oppure} \quad x + y = a\,.$$

(1) Descrivere le classi di equivalenza. Da quanti elementi è composta ciascuna classe di equivalenza?

(2) Denotata con $q$ la proiezione canonica sullo spazio quoziente $I/\sim$, descrivere gli aperti saturi. A quale condizione deve soddisfare $y$ affinché l'intervallo $(x, y)$ contenuto in $I$ sia saturo?

(3) Si dimostri che $I/\sim$ è omeomorfo ad un intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$.

**Soluzione** (1) La classe di equivalenza di $x$ è data da $[x] = \{x, a - x\}$. Si osservi che essa consiste di $x$ e del suo simmetrico rispetto al punto $a/2$. Dunque $[x] = \{x\}$ se e solo se $x = a/2$.

(2) Un aperto $A$ di $I$ è saturo se e solo contenendo $x$ contiene tutta la sua classe di equivalenza. Osservato che ogni aperto di $I$ è unione di intervalli del tipo $[0, x)$, oppure $(x, y)$ oppure $(y, a]$, $A$ è saturo se e solo è unione di intervalli di questo tipo e dei loro rispettivi simmetrici rispetto al punto $a/2$.

Pertanto l'intervallo $(x, y)$ contenuto in $I$ è saturo se e solo se $y$ è il simmetrico di $x$ rispetto ad $a/2$, cioè $y = a - x$.

(3) In base oll'osservazione che $a - x$ è il simmetrico di $x$ rispetto ad $a/2$, si consideri l'applicazione $f : I \to [0, a/2]$, definita ponendo

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{se } \ 0 \le t \le a/2 \\ a - t, & \text{se } \ \frac{a}{2} \le t \le a. \end{cases} \quad .$$

$f$ è continua perché incollamento di due funzioni continue. Inoltre è suriettiva. Denotata con $\rho_f$ la relazione di equivalenza indotta da $f$, cioè $x\rho_f y$ se e solo se $f(x) = f(y)$, si verifica facilmente che $\rho_f = \sim$. Pertanto per conseguire l'asserto basta provare che $f$ è un'applicazione aperta. Ciò è immediato, osservando che ogni aperto del tipo $[0, x)$ oppure $(x, y)$ oppure $(y, x)$ con $0 < x < y < a$, è trasformato da$f$ in un aperto di $[0, a/2]$.

Segue allora che $f$ è una identificazione e dunque $I/\sim$ è omeomorfo a $[0, a/2]$.

**2.** Si considerino, nel piano euclideo $\mathbb{R}^2$, con coordinate cartesiane $(x, y)$, e per ogni numero naturale $n \ge 1$, le ellissi:

$$C_n : \quad x^2 + \frac{y^2}{n^2} = 1, \qquad\qquad E_n : \quad x^2 + \frac{y^2}{\frac{1}{n^2}} = 1$$

e le loro unioni:

$$C = \bigcup_{n\ge1} C_n, \qquad\qquad E = \bigcup_{n\ge1} E_n.$$

(i) Determinare le frontiere $Fr\ C$, $Fr\ E$, e le chiusure $\overline{C}$, $\overline{E}$ dei due insiemi $C$, $E$.

(ii) Stabilire se $C$, $E$, $\overline{C}$, $\overline{E}$ sono sottospazi compatti di $\mathbb{R}^2$.

(iii) Stabilire se $C$, $E$, $\overline{C}$, $\overline{E}$ sono sottospazi connessi di $\mathbb{R}^2$.

**Soluzione.** (i) $C$ ed $E$ sono unioni numerabili delle ellissi risp. $C_n$ ed $E_n$. Ogni ellisse $C_n$ ed $E_n$ è naturalmente un chiuso di $\mathbb{R}^2$ (controimmagine del punto $1 \in \mathbb{R}$ mediante la funzione continua data dal primo membro delle rispettive equazioni). Tuttavia, unioni numerabili di chiusi non sono necessariamente dei chiusi. La frontiera $Fr\ E$ di $E$ è unione di $E$ (che è privo di punti interni) con il segmento $[-1, 1]$ dell'asse $x$, i cui punti sono di accumulazione per $E$. Risulta invece $Fr\ C = C \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = -1 \ \text{ o } \ x = 1\}$, in quanto ogni punto delle rette $x = -1$ e $x = 1$ è di accumulazione per $C$. In conclusione risulta:

$$Fr\ E = E \cup \{(x, y); x \in [-1, 1], y = 0\} = \overline{E}$$

$$Fr\ C = C \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = -1 \text{ o } x = 1\} = \overline{C}.$$

(ii) $\overline{C}$ e $\overline{E}$ sono entrambi chiusi. Essendo $\overline{E}$ anche limitato, esso è compatto. $\overline{C}$, non essendo limitato, non è invece compatto.

(iii) Ogni punto sia di $\overline{C}$ che di $\overline{E}$ risulta congiungile con un arco - di una delle ellissi di $C$ o di $E$, oppure del segmanto o delle due rette che costituiscono le rispettive frontiere - con il punto $(1,0)$. Né $\overline{C}$ che $\overline{E}$ sono invece semplicemente connesse, poiché ognuna delle ellissi di cui $C$ e $E$ sono unioni risulta contraibile ad un punto.

**3.** Sia $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \ uv > 0\}$, e si consideri la parametrizzazione $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ così definita:

$$\varphi(u,v) = \big(u, v, \frac{u-v}{uv}\big), \ \forall\, (u,v) \in U.$$

(i) Verificare che $f$ è una parametrizzazione regolare di una superficie $\boldsymbol{S}$ sconnessa e non compatta.

(ii) Verificare che la superficie $\boldsymbol{S}$ è formata da punti tutti iperbolici.

(iii) Sia $\mathcal{D}$ la curva in $U \subset \mathbb{R}^2$ parametrizzata da

$$\beta(t) = (t, \frac{1}{t}), \ \forall\, t > 0$$

e sia $\mathcal{C} = \varphi(\mathcal{D})$ la sua immagine in $\boldsymbol{S}$. Determinare nel punto $P = (1,1,0)$ la curvatura e la torsione di $\mathcal{C}$. Calcolare infine la curvatura normale $k_n(\mathcal{C}, P)$.

**Soluzione.** (i) $\boldsymbol{S}$ è il grafico della funzione differenziabile $z = \frac{x-y}{xy}$, definita sull'aperto $U$ del piano $z = 0$. Ne segue che $\boldsymbol{S}$ è una superficie differenziabile. Poiché $U$ è sconnesso e non compatto, lo stesso è vero per $\boldsymbol{S}$. [Si osservi che $\boldsymbol{S}$ ha due componenti connesse $\boldsymbol{S}_+ = \boldsymbol{S} \cap [x > 0, \ y > 0]$ e $\boldsymbol{S}_- = \boldsymbol{S} \cap [x < 0, \ y < 0]$ e che $\boldsymbol{S}$ contiene ad esempio la retta $\{(u,u,0), \ \forall\, u \neq 0\}$ e dunque non è limitata].

( ii) Risulta:

$$\begin{cases} \varphi_u = (1, 0, \frac{1}{u^2}) \\ \varphi_v = (0, 1, -\frac{1}{v^2}) \end{cases} \qquad e \qquad \begin{cases} \varphi_{uu} = (0,0,-\frac{2}{u^3}) \\ \varphi_{uv} = (0,0,0) \\ \varphi_{vv} = (0,0,\frac{2}{v^3}) \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} E = 1 + \frac{1}{u^4} \\ F = -\frac{1}{u^2 v^2} \\ G = 1 + \frac{1}{v^4} \end{cases} \qquad e \qquad \begin{cases} L = \frac{-\frac{2}{u^3}}{\sqrt{EG-F^2}} \\ M = 0 \\ N = \frac{\frac{2}{v^3}}{\sqrt{EG-F^2}}. \end{cases}$$

Allora

$$LN - M^2 = \frac{-4}{u^3\, v^3 (EG-F^2)} < 0, \ \forall\, (u,v) \in U,$$

e dunque tutti i punti di $\boldsymbol{S}$ sono iperbolici.

(*iii*) La curva $\mathcal{C} = \varphi(\mathcal{D})$ è parametrizzata da

$$\alpha(t) = \varphi(t, \frac{1}{t}) = \big(t, \frac{1}{t}, t - \frac{1}{t}\big), \ \forall\, t > 0.$$

Poiché $\mathcal{C}$ è contenuta nel piano $x - y = z$, allora ha torsione $\tau$ identicamente nulla. Calcoliamo la curvatura $k$ di $\mathcal{C}$ nel punto $P = \alpha(1)$. Si ha:

$$\begin{cases} \underline{\alpha}' = \big(1, -\frac{1}{t^2}, 1 + \frac{1}{t^2}\big) \\ \underline{\alpha}'' = \big(0, \frac{2}{t^3}, -\frac{2}{t^3}\big) \end{cases}$$

e quindi

$\underline{\alpha}'(1) = (1,-1,2), \ \ \|\underline{\alpha}'(1)\| = \sqrt{6}, \ \ \underline{\alpha}''(1) = (0,2,-2), \ \ \underline{\alpha}'(1) \wedge \underline{\alpha}''(1) = (-2,2,2).$

Allora

$$k(t) = \frac{\|\underline{\alpha}'(1) \wedge \underline{\alpha}''(1)\|}{\|\underline{\alpha}'(1)\|^3} = \frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

Per calcolare $k_n(\mathcal{C}, P)$ si può utilizzare la definizione

$$k_n(\mathcal{C}, P) = \underline{k}^{\mathcal{C}}(P) \cdot \boldsymbol{N}(P)$$

ovvero il fatto che

$$k_n(\mathcal{C}, P) = \frac{II_P(\underline{\alpha}'(1))}{I_P(\underline{\alpha}'(1))}$$

Utilizzando la prima definizione abbiamo:

$\underline{k}^{\mathcal{C}}(P) = \frac{\underline{\alpha}''(1)}{\|\underline{\alpha}'(1)\|^2} - \frac{\underline{\alpha}'(1) \cdot \underline{\alpha}''(1)}{\|\underline{\alpha}'(1)\|^4}\, \underline{\alpha}'(1) = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, 0)$ e

$\boldsymbol{N}(P) = \frac{\varphi_t(1,1)\wedge\varphi_s(1,1)}{\|\varphi_t(1,1)\wedge\varphi_s(1,1)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1).$

Ne segue: $k_n(\mathcal{C}, P) = 0$.

Utilizzando la seconda strada abbiamo:

$\underline{\alpha}'(1)$ ha coordinate $\underline{\beta}'(1) = (1,-1)$ in base $\{\varphi_t(1,1),\ \varphi_s(1,1)\}$ e quindi

$$I_P(\underline{\alpha}'(1)) = (1 \quad -1)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (1 \quad -1)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 6,$$

$$II_P(\underline{\alpha}'(1)) = (1 \quad -1)\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (1 \quad -1)\begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0.$$

Ne segue di nuovo: $k_n(\mathcal{C}, P) = 0$.

**4.** Si considerino in $\mathbb{R}^3$, munito della topologia euclidea, i sottospazi

$$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2 = 1\},$$

$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2 \neq 0\},$$

$$Y = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2 \neq 0,\ x^2+z^2 \neq 0,\ y^2+z^2 \neq 0\},$$

e si osservi che $X$ e $Y$ coincidono con $\mathbb{R}^3$ privato rispettivamente dell'asse $z$ e dei tre assi coordinati.

(1) Dimostrare che i sottospazi $X$ e $S^2 \bigcap X$ sono omotopicamente equivalenti tra di loro, esibendo un'equivalenza omotopica esplicita.

(2) Si puó stabilire allo stesso modo che $Y$ e $S^2 \bigcap Y$ sono omotopicamente equivalenti tra di loro?

(3) Stabilire se $X$ e $Y$ sono semplicemente connessi. Stabilire inoltre (intuitivamente) se $X$ e $Y$ sono omotopicamente equivalenti tra di loro?