Cognome: .... Nome: .... Numero di matricola: ....

Corso di Geometria II, a. a. 2018-19

Prova in itinere del 16 aprile 2019

Norme per le prove in itinere e le prove scritte d'esame

1. Scrivere subito cognome, nome e numero di matricola su questo foglio.
2. Consegnate solo i fogli che ritenete essere bella copia.
3. **Svolgere gli esercizi con ordine e completezza, motivando ogni risposta. Nel giudizio si terrà conto della chiarezza.**
4. Durante non si possono utilizzare calcolatrici o telefoni cellulari.
5. La durata della prova è di **1 ora e 45 minuti**. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

1. Si considerino su $\mathbb{R}$ le due topologie $\mathfrak{i}_d, \mathfrak{j}_d$ rispettivamente degli aperti illimitati a destra e di Sorgenfrey destra. Si ricordi che esse sono definite, oltre che dal contenere $\emptyset, \mathbb{R}$, nel modo seguente:

$$\mathfrak{i}_d = \{(a, +\infty), a \in \mathbb{R}\}, \qquad \mathfrak{j}_d \text{ con base } \{[a, b), a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$$

i) Stabilire se $(\mathbb{R}, \mathfrak{i}_d)$ è compatto e/o se è connesso.

ii) Stabilire se $(\mathbb{R}, \mathfrak{j}_d)$ è compatto e/o se è connesso.

2. Si considerino nello spazio $M_2(\mathbb{R})$ delle matrici 2×2 a coefficienti reali la topologia euclidea, indotta dall'isomorfismo $M_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4$, e il sottoinsieme

$$S = \{A \in M_2(\mathbb{R}), \det A = 0\}.$$

i) Determinare la parte interna, la parte esterna, la frontiera e la chiusura di S.

ii) Considerando poi su S la topologia euclidea indotta dall'ambiente $\mathbb{R}^4$, stabilire se S è compatto e/o se è connesso.

3. Si considerino i seguenti spazi e sottospazi topologici, dotati in ogni caso della topologia euclidea; con S^1 si denota la circonferenza di centro l'origine e raggio 1.

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}, \quad B = S^1 \times [0, 1],$$

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 = 1,\ 0 \leq z \leq 1\}, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

i) Per ogni coppia di spazi tra A, B, C, D stabilire se può esistere un omeomorfismo tra i due.

ii) Nei casi in cui tale omeomorfismo esiste, scrivere l'espressione analitica di un'applicazione biunivoca e continua che lo realizzi.

4. Si consideri in $\mathbb{R}^3$ la curva $\mathcal{C}$ di equazioni parametriche

$$x(t) = t, \quad y(t) = \cosh t, \quad z(t) = \sinh t$$

i) Calcolare, in funzione di t le funzioni $k(t)$ e $\tau(t)$ di curvatura e torsione.

ii) Determinare, in funzione di t, il triedro mobile di Frenet $\vec{t}(t)$, $\vec{n}(t)$, $\vec{b}(t)$ su $\mathcal{C}$.

[Si ricordi in primo luogo l'identità $\cosh^2 t - \sinh^2 t \equiv 1$. Per il triedro mobile si consiglia di determinare, nell'ordine $\vec{t}(t)$ poi $\vec{b}(t)$ e infine $\vec{n}(t)$, usando il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$.]

a