Corso di Geometria II, a. a. 2015-16

Soluzione esercizi del foglio n. 4

1. Sia $I = [0, 1] \subset \mathbf{R}$ con topologia euclidea indotta. Sia F l'insieme delle funzioni continue di I in $\mathbf{R}$.

i) Verificare che $d : F \times F \to \mathbf{R}$, definita ponendo

$$d(f, g) = sup_{x\in I}|f(x) - g(x)|$$

è una distanza su F.

Sia τ_d la topologia indotta da d su F.

ii) Provare che per ogni $f, g \in F$ l'applicazione $\alpha : I \to F$, con $\alpha(t) = f + t(g - f)$ è continua.

iii) Dimostrare che (F, τ_d) è connesso per archi.

Soluzione. i) Si verifica facilmente che $d(f, g) \geq 0$ e che $d(f, g) = d(g, f)$ per ogni $f, g \in F$. Proviamo la disuguaglianza triangolare. Risulta per ogni $f, g, h \in F$

$$sup|f(x) - h(x)| = sup|f(x) - g(x) + g(x) - h(x)| \leq sup|f(x) - g(x)| + sup|g(x) - h(x)|.$$

Dimostriamo infine che se $d(f, g) = 0$ allora $f = g$. Infatti se fosse $f \neq g$, allora $|f(x) - g(x)| \neq 0$, per qualche $x \in I$.

ii) Se è $f = g$ allora $\alpha(t) = f$, per ogni t. Dunque α è una funzione costante, ed è continua. Sia allora $f \neq g$ e sia $t_0 \in I$. Si osservi preliminarmente che per ogni $t \in I$ risulta $f + t(f - g) \in F$. Dato comunque un disco aperto $D_\epsilon(\alpha(t_0))$, determiniamo $\delta_\epsilon > 0$ tale che $t \in (t_0 - \delta_\epsilon, t_0 + \delta_\epsilon)$ implichi $\alpha(t) \in D_\epsilon(\alpha(t_0))$. L'ultima relazione equivale a

$$f + t(g - f) \in D_\epsilon(\alpha(t_0)),$$

cioè

$$sup|f(x) + t(g(x) - f(x)) - f(x) - t_0(g(x) - f(x))| < \epsilon,$$

ovvero

$$sup|(t - t_0)(g(x) - f(x))| < \epsilon.$$

Basta allora che

$$\delta_\epsilon < \frac{\epsilon}{sup|g(x) - f(x)|}.$$

iii) Per ogni $f, g \in F$ l'applicazione α prima definita è un arco di estremi f e g tutto contenuto in F.

2. Nel piano euclideo $\mathbf{R^2}$ si consideri il sottoinsieme $D = (0, +\infty) \times [0, +\infty)$.

i) Determinare $Int(D)$, $\overline{D}$, $Fr(D)$, $Est(D)$.

Sia ρ la relazione di equivalenza di $\mathbf{R^2}$ ottenuta identificando D ad un punto.

ii) Sia $X = \mathbf{R^2}/\rho$ lo spazio topologico quoziente e sia ξ il punto di X che è immagine di D tramite la proiezione canonica $p : \mathbf{R^2} \to X$. Determinare la chiusura in X, del sottoinsieme costituito dal solo punto ξ.

iii) Stabilire se X è connesso e se è compatto.

Soluzione. i) Risulta:

$Int(D) = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$; $\overline{D} = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$;

$Est(D) = \big[(-\infty, 0) \times \mathbf{R}\big] \cup \big[(0, +\infty) \times (-\infty, 0)\big]$; $Fr(D) = \big[[0, +\infty) \times \{0\}\big] \cup \big[\{0\} \times [0, +\infty)\big]$.

ii) Osserviamo che gli aperti saturi di $\mathbf{R^2}$ sono quelli contenenti D e quelli disgiunti da D. Inoltre, se $\vec{x} = (x, y) \notin D$, identificheremo $\vec{x}$ con la sua immagine $p(\vec{x}) \in X$. Dimostriamo che

$$\overline{\xi} = \xi \cup \{(0, y),\ y \geq 0\} = p(\overline{D}).$$

Infatti $p(\overline{D})$ è chiuso in X in quanto $p^{-1}(p(\overline{D})) = \overline{D}$ è chiuso in $\mathbf{R^2}$. Infine ogni $\vec{y} = (0, y) \in \overline{\xi}$: se infatti W è un intorno aperto di $\vec{y}$ in X, $p^{-1}(W)$ è un intorno aperto di $\vec{y}$ in $\mathbf{R^2}$ e $p^{-1}(W)$ interseca D. Dunque $W = p(p^{-1}(W)) \ni \xi$.

iii) X è connesso in quanto è quoziente di un connesso. Verifichiamo che X non è compatto. Consideriamo in $\mathbf{R^2}$ il ricoprimento formato dai seguenti aperti:

$$H_n = \{(x, y) \in \mathbf{R^2} : x > -n,\ y > -n\}, n \geq 1.$$

Si tratta di aperti saturi di $\mathbf{R^2}$. Si verifica subito che la famiglia $\{p(H_n)\}_{n\geq 1}$ è un ricoprimento aperto di X privo di sottoricoprimenti finiti.

3. Sia $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \to \mathbf{R^4}$ l'applicazione:

$$\varphi : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to (a,b,c,d).$$

Sia $\varphi^{-1}\mathcal{E}$ la topologia su $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ immagine inversa della topologia euclidea. Sia

$$S = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) : \; A = \; A^t \; = \; A^{-1}\}$$

il sottoinsieme delle matrici simmetriche e ortogonali.

i) Verificare che S è chiuso.

ii) Verificare che S è compatto.

iii) Determinare le componenti connesse di S.

Soluzione. i), ii), iii) φ è biiettiva e dunque la corrispondenza tra aperti la rende un omeomorfismo. Sia $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$. Si ha: $A \in S$ se e solo se $x_2 = x_3$ e

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque $A \in S$ se e solo se

$$x_2 = x_3, \quad x_1^2 + x_2^2 = x_2^2 + x_4^2 = 1, \quad x_1x_2 + x_2x_4 = 0.$$

Ne segue che necessariamente $x_2(x_1+x_4) = 0$. Pertanto, se $x_2 = 0$, le uniche possibilità sono le quattro matrici

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; -I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; -J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se invece $x_2 \neq 0$ è necessariamente $x_1 = -x_4$ e pertanto $\det A = -x_4^2 - x_2^2 = -1$. Ne segue che

$$S = O^-(2) \cup \{I\} \cup \{-I\}$$

è unione del chiusi $O^-(2) = O(2) - SO(2)$ di $\mathbf{R^4}$ con i due punti I e $-I$. Ne segue che S è chiuso, ed essendo limitato, anche compatto. S non è invece connesso, avendo le tre componenti connesse $S = O^-(2)$, $\{I\}$, $\{-I\}$

4. Nel piano euclideo $\mathbf{R^2}$ è assegnata la curva $\mathcal{C}$, parametrizzata da

$$\alpha(t) = (t^2-1, t(t^2-1)), \quad t \in \mathbf{R}$$

i) Verificare che $\mathcal{C}$ è un chiuso, connesso e non compatto in $\mathbf{R^2}$ (rispetto alla topologia euclidea)

ii) Posto $X = \mathcal{C} - \{O\}$, verificare che X ha tre componenti connesse, tutte non compatte.

Soluzione. i) α è continua, essendolo le sue componenti. $\mathcal{C}$ è un insieme connesso perchè immagine tramite α del connesso $\mathbf{R}$. Per verificare che $\mathcal{C}$ è chiuso, consideriamo l'equazione cartesiana implicita $y^2 = x^3 + x^2$ di $\mathcal{C}$, ottenuta eliminando il parametro t tra le due equazioni parametriche, e la relativa funzione polinomiale $\phi(x,y) = y^2 - x^3 - x^2$ da $\mathbf{R^2}$ a $\mathbf{R}$. Risulta: $\mathcal{C} = \phi^{-1}(0)$. Dunque $\mathcal{C}$ è chiuso. Infine $\mathcal{C}$ non è limitato, e dunque $\mathcal{C}$ non è compatto. Infine $\mathcal{C}$ è immagine mediante la α continua di $\mathbf{R}$, che è connesso. Pertanto $\mathcal{C}$ è connesso

ii) Si ha: $X = \mathcal{C} - \{O\} = \alpha(\mathbf{R} - \{\pm 1\}) = \alpha((-\infty,-1)) \cup \alpha((-1,1)) \cup \alpha((1,+\infty))$. Si tratta di tre connessi a due a due disgiunti: dunque sono le tre componenti connesse di X. La prima e la terza sono insiemi non limitati e dunque non sono compatti in $\mathcal{C}$. La seconda è un insieme limitato ma non chiuso, essendo $\overline{\alpha((-1,1))} = \alpha[[-1,1]] = \alpha((-1,1)) \cup \{O\}$.

5. Nello spazio topologico $X = \{(x,y) \in \mathbf{R^2} : \; xy > 0\}$, dotato di topologia euclidea, si consideri la seguente relazione di equivalenza $(x,y)\,\rho\,(x',y')$ se e solo se

$$det \begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix} = 0.$$

i) Descrivere gli aperti saturi di X e determinare la saturazione dell'aperto $U = \{(x, y) \in X \,:\, x > 1,\ y > 1\}$.

ii) Verificare che lo spazio topologico quoziente $X/_\rho$ non è compatto, determinandone un ricoprimento aperto privo di sottoricoprimenti finiti.

iii) Verificare che $X/_\rho$ è connesso per archi.

Soluzione. i) Posto $P = (x, y), P' = (x', y') \in X$, si ha: $P \,\rho\, P' \Leftrightarrow P, P'$ sono allineati con l'origine O. Ne segue che la saturazione di ogni punto $P \in X$ è la retta r per O e P, privata dell'origine O. Gli aperti saturi di X sono quindi gli aperti di X ottenibili come unione insiemistica di rette per l'origine.

La saturazione di U coincide con X. Per dimostrarlo basterà verificare che ogni retta per O e per un generico punto $P = (x, y) \in X$ interseca U. Assumiamo $x, y > 0$ (altrimenti basta sostituire P con $P' = (-x, -y)$ ad esso equvalente). La retta r per O, P ha equazioni parametriche $X = xt, Y = yt$. Se $x \geq y$, intersecando r ad esempio con la retta $Y = 2$, si ottiene il punto $(2\frac{x}{y}, 2) \in U$; se invece $y \geq x$, basta intersecare r con la retta $X = 2$, e si ottiene il punto $(2, 2\frac{y}{x}) \in U$.

ii) Per ogni $n \geq 1$ si consideri il punto $P_n = (\frac{1}{n}, 1)$ e la retta r_n per O e P_n. Sia E_n l'aperto (saturo) ottenuto ruotando in verso antiorario una retta per O dall'*asse* x sino a r_n. Si ha $E_1 \subset E_2 \subset \,...\subset\, E_n \subset\, ...$ Indicata con $p : X \to X/_\rho$ la proiezione canonica, la famiglia $\{p(E_n)\}$ è un ricoprimento aperto di $X/_\rho$ privo di sottoricoprimenti finiti.

iii) Presi $\overline{P}$, $\overline{Q} \in X/_\rho$, possiamo assumere che i punti P, Q si trovino sulla circonferenza unitaria S^1 e nel primo quadrante. Sia $\mathcal{C}$ l'arco di S^1 di estremi P, Q ed $\alpha : [0, 1] \to \mathcal{C}$ una funzione continua che descrive tale arco. Allora $p \circ \alpha : [0, 1] \to X/_\rho$ è una funzione continua di estremi $\overline{P}$, $\overline{Q}$.