Corso di Geometria II, a. a. 2015-16

Foglio n. 7

1. Si consideri il sottospazio $X = T^2 \cup D^2$ di $\mathbb{R}^3$ unione di una superficie torica T^2 e di un suo disco meridiano D^2, avente per frontiera un meridiano di T^2.

i) Determinare una presentazione di $\pi_1(X)$.

ii) Si consideri poi, sempre in $\mathbb{R}^3$, il sottospazio $Y = X \cup D'^2$, essendo D'^2 un altro disco meridiano di T^2. Determinare una presentazione di $\pi_1(Y)$.

2. Si considerino sul piano xz di $\mathbb{R}^3$ le tre circonferenze

$$C: \ (x-2)^2 + z^2 = 1, \quad C_1: \ x^2 + z^2 = 1, \quad C_2: \ x^2 + z^2 = 9,$$

e siano $S,\ S_1,\ S_2$ le superfici ottenute per rotazione attorno all'asse z rispettivamente di $C,\ C_1,\ C_2$.

i) Siano $X_1 = S \cup S_1$ e $X_2 = S \cup S_2$. Determinare una presentazione di $\pi_1(X_1)$ e di $\pi_1(X_2)$.

ii) Sia poi $X = S \cup S_1 \cup S_2$. Determinare una presentazione di $\pi_1(X)$.

3. Siano date le presentazioni dei gruppi

$$G =< a, b \,|\, aba^{-1}b >, \qquad G' =< c, d \,|\, c^2d^2 >$$

i) Verificare che l'applicazione tra insiemi delle parole

$$f : W(a,b) \to W(c,d)$$

definita sulle lettere da $f(a) = c$, $f(b) = dc$, verifica la proprietà

$$f(aba^{-1}b) = c^{-1}(c^2d^2)c.$$

ii) Verificare poi che l'applicazione tra insiemi delle parole

$$g : W(c,d) \to W(a,b)$$

definita sulle lettere da $g(c) = a$, $g(d) = ba^{-1}$, verifica la proprietà

$$g(c^2d^2) = a(aba^{-1}b)a^{-1}.$$

iii) Dedurne le identità

$$g \circ f = id_{W(a,b)}, \qquad f \circ g = id_{W(c,d)},$$

e che f, g portano rispettivamente $aba^{-1}b$ e c^2d^2 nei mimimi sottogruppi normali contenenti rispettivamente c^2d^2 e $aba^{-1}b$.

iv) Tutto ciò c'entra qualcosa con le presentazioni dei gruppi fondamentali della bottiglia di Klein

$$K^2 = \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2?$$

4 Siano X, Y spazi topologici, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Dimostrare il seguente teorema del prodotto:

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0),$$

seguendo la seguente traccia.

i) Dette $p : X \times Y \to X$, $q : X \times Y \to Y$ le proiezioni, definire l'applicazione

$$\varphi : \ \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0),$$

mediante $\varphi[f] = (p_*[f], q_*[f]) = ([p \circ f], [q \circ f])$, evidentemente ben definita sulle classi di omotopia di cappi.

ii) Verificare che φ è suriettiva: dato $([f_1], [f_2]) \in \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$, osservare che $f : I \to X \times Y$, definito da $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$ è tale che $\varphi[f] = ([f_1], [f_2])$.

iii) Verificare che φ è iniettiva: $\varphi[f] = \varphi[g]$ implica $p \circ f \sim p \circ g$ e $q \circ f \sim q \circ g$ e le rispettive omotopie F_1 e F_2 consentono di scrivere un' omotopia F da f e g.

iv) Infine φ è un omomorfismo di gruppi, e questa verifica è del tutto naturale.