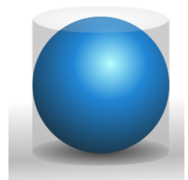
Corso di Geometria II, a. a. 2015-16

Foglio n. 8

1. Sia X la sfera S^2 privata dei poli nord e sud, e sia Y il cilindro (aperto e senza basi) ad essa circoscritto nell'equatore e di altezza pari al diametro della sfera. In formule:

$$X : \begin{cases} x(\alpha,\beta) = r\sin\alpha\cos\beta \\ y(\alpha,\beta) = r\sin\alpha\sin\beta \\ z(\alpha,\beta) = r\cos\alpha \end{cases} \quad (0<\alpha<\pi,\ 0\le\beta\le 2\pi); \qquad Y : \begin{cases} x(u,v) = r\cos v \\ y(u,v) = r\sin v \\ z(u,v) = ru \end{cases} \quad (-1<u<1,\ 0\le v\le 2\pi)$$



Dato $P=(x_0,y_0,z_0)\in X$ si denoti con $Q=(0,0,z_0)$ il punto dell'asse z alle stessa quota di P. Si considerino le applicazioni

$$\varphi,\psi : X\to Y \qquad \text{definite da} \qquad \varphi(P) = Y\cap t\,\vec{QP}, \quad \psi(P) = Y\cap t\,\vec{PQ},$$

dove con $t\,\vec{QP}$ e $t\,\vec{PQ}$ sono denotate le semirette ($t\ge 0$) rispettivamente uscente da Q e passante per P e viceversa. La φ è chiamata *applicazione di Archimede*, e ψ è la sua composizione con la rotazione delle sfera attorno all'asse z di angolo π.

i) Dare una descrizione di φ e ψ in termini dei parametri (α,β) su X e (u,v) su Y, determinando nei due casi le corrispondenti funzioni $u=u(\alpha,\beta)$, $v=v(\alpha,\beta)$.

ii) Verificare che φ e ψ sono applicazioni omotope.

iii) Descrivere i gruppi fondamentali di X e di Y, e di conseguenza constatare che le indotte delle due applicazioni coincidono: $\varphi_* = \psi_*$
che (F,τ_d) è connesso per archi.

Soluzione. i) Dalle definizioni di φ e di ψ risulta subito che in termini dei parametri locali sulle due superfici risulta per φ: $u=\cos\alpha, v=\beta$; per ψ invece: $u=\cos\alpha, v=\beta+\pi$.
ii) Un' omotopia da φ a ψ è dunque data da $F: X\times I\to Y$, dove ancora usando i parametri (α,β) su X, t su I, e (u,v) su Y, risulta $F:(\alpha,\beta,t)\to(u=\cos\alpha, v=\beta+t\pi)$.
iii) Sia X che Y hanno per retratto di deformazione la comune circonferenza equatoriale S^1. Pertanto $\pi_1(X)\cong\mathbb{Z}\cong\pi_1(Y)$. Poiché sia φ che ψ portano il cappio generatore di $\pi_1(S^1)$ in se stesso, da ciò (e dal fatto che φ e ψ sono omotope) segue che φ_* e ψ_* sono l'identità su $\mathbb{Z}$.

2. Si consideri il toro

$$T^2 = S^1\times S^1 = \{(e^{2\pi it}, e^{2\pi is});\ t,s\in[0,1]\},$$

dove si ricordi che $e^{2\pi it} = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)\in S^1\subset\mathbb{R}^2=\mathbb{C}$.

i) Verificare che l'applicazione $p:(t,s)\to(4t,6s)$ definisce un rivestimento

$$p: T^2\to T^2.$$

ii) Determinare la cardinalità delle fibre $p^{-1}(y_0)$.

iii) Descrivere l'applicazione p_* indotta tra i gruppi fondamentali, precisando l'indice del sottogruppo

$$p_*[\pi_1(T^2,x_0)]\subset\pi_1(T^2,p(x_0)).$$

iv) Si consideri la spirale $\mathcal{S}$, sul toro che riveste, definita dalla relazione $s=2t$. Quante volte la proiezione $p(\mathcal{S})$ interseca un parallelo del toro rivestito? E un meridiano?

Soluzione. i) + ii) + iii) L'applicazione p avvolge il toro $24 = 4\times 6$ volte su se stesso. Dunque la cardinalità delle fibre è 24; il sottogruppo $p_*[\pi_1(T^2,x_0)]\subset\pi_1(T^2,p(x_0))$ è $4\mathbb{Z}\oplus 6\mathbb{Z}\subset\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$, di indice 24, come deve essere uguale alla cardinalità delle fibre.

iv) Un disegno di $24 = 4 \times 6$ quadrati adiacenti aiuta a verificare che la spirale $\mathcal{S}$ si proietta nel primo quadrato in basso a sinistra (toro rivestito) nella spirale $p(\mathcal{S})$ che incontra $2 \times 6 = 12$ volte un parallelo e $1 \times 4 = 4$ volte un meridiano.

3. Si consideri lo spazio $X = S^2 \cup I$, dove S^2 è la 2-sfera e I un suo diametro. Calcolare $\pi_1(X)$ usando il teorema di van Kampen.

Soluzione. Si può usare il teorema di van Kampen, relativamente a due aperti U e V, entrambi contenenti sia il diametro I che un emisfero. Si vede facilmente che sia U che V si retraggono ("a ventaglio") a una circonferenza S^1, mentre $U \cap V$ si retrae all'unione di una circonferenza e un suo diametro, a sua volta retraibile a una figura a otto. Da qui le presentazioni dei gruppi fondamentali:

$$\pi_1(U) =< a >, \qquad \pi_1(V) =< b >, \qquad \pi_1(U \cap V) =< c, d >,$$

dove le due indotte delle inclusioni $U \cap V \hookrightarrow U$ e $U \cap V \hookrightarrow V$ tra i loro gruppi fondamentali mandano rispettivamente $c \to a, d \to a$ e $c \to b, d \to b$. Ne segue la presentazione

$$\pi_1(X) =< a, b, ab^{-1} > \cong < a > \cong \mathbb{Z}.$$

4. Determinare il gruppo fondamentale del seguente sottospazio di $\mathbb{R}^2$:

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\text{ con }\; -1 \leq x, y \leq 1 \;\text{ e }\; x \in \mathbb{Z} \;\text{ o }\; y \in \mathbb{Z}\}.$$

Soluzione. X è l'unione dei lati e vertici dei quadrati unitari dei quattro quadranti. Retraendo all'origine O i lati contenuti negli assi coordinati, X si retrae ad un bouquet di 4 circonferenze passanti per O. Pertanto

$$\pi_1(X) \cong < a, b, c, d >$$

è il gruppo libero con 4 generatori.

5. Determinare il gruppi fondamentali dei seguenti spazi:

i) $\mathbb{R}P^2 - \{P\}$, il piano proiettivo reale privato di un punto.

ii) $\mathbb{C}P^2 - \{P\}$, il piano proiettivo complesso privato di un punto.

Soluzione. i) $\mathbb{R}P^2 - \{P\}$ si retrae al bordo del poligono con identificazioni che è modello topologico di $\mathbb{R}P^2$, e tale bordo è un $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$. Dunque

$$\pi_1(\mathbb{R}P^2 - \{P\}) \cong < c > \cong \mathbb{Z}.$$

ii) Invece $\mathbb{C}P^2 - \{P\}$ si retrae all'iperpiano all'infinito $\mathbb{C}P^1$ di $\mathbb{C}P^2$. Pertanto

$$\pi_1(\mathbb{C}P^2 - \{P\}) \cong \pi_1(\mathbb{C}P^1) \cong \{1\}.$$