Spazi di Hausdorff, successioni e spazi metrizzabili

P. Piccinni

Corso di Geometria II (A-L), a.a. 2019-20
Laurea Triennale in Matematica
Sapienza Università di Roma Classroom - codice 24bsdao

Lezione del 17 marzo 2020, durata 2 ore
Lezione del 19 marzo 2020, durata 2 ore

Indice

1. Spazi di Hausdorff
   - Assioma di separazione T_2
   - Assioma di separazione T_1
   - Un criterio
   - Confronto di condizioni
2. Successioni e loro limiti
   - Definizioni
   - Unicità del limite in Hausdorff
   - Esempio 1
   - Esempio 2
   - Esempio 3
   - Hausdorff e successioni
   - Hausdorff, T_1 e omeomorfismi
3. Spazi di Hausdorff, sottospazi e prodotti
   - Spazi di Hausdorff e sottospazi
   - Successive domande
   - Spazi di Hausdorff e prodotti
   - Spazi T_1 e prodotti
   - Spazi metrici e prodotti finiti
   - Spazi metrici e prodotti infiniti
4. Il problema della metrizzabilità di $\mathbb{R}^J$
   - La distanza uniforme in $\mathbb{R}^J$
   - Topologia uniforme e convergenza uniforme
   - Confronto tra topologie su $\mathbb{R}^J$
   - Distanza D su $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$
   - Conclusioni

Definizione di spazio T_2 o di Hausdorff

Nei testi di topologia vi è spesso un capitolo sui cosiddetti *assiomi di separazione*. Essi sono relativi a classi di spazi topologici che soddisfano la proprietà asserita dal rispettivo assioma. Tanto gli assiomi quanto gli spazi vengono denotati con i simboli T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, la lettera T essendo l'iniziale di "Trennung", in tedesco appunto "separazione".

Per il momento considereremo solo due assiomi di separazione: T_2 e T_1.

Definizione. Uno spazio topologico (X, τ) si dice *di Hausdorff* o T_2 se per ogni $x, y \in X$, $x \neq y$ esistono loro intorni aperti A_x e A_y tali che

$$A_x \cap A_y = \emptyset.$$

Teorema. Ogni spazio metrico è di Hausdorff.

Dimostrazione. Sia (X, d) lo spazio metrico, e siano $x, y \in X$, $x \neq y$. Sia $d(x, y) = 2\delta > 0$. Consideriamo i seguenti dischi aperti, intorni aperti di x e di y: $A_x = D_\delta x$, $A_y = D_\delta y$. Essi hanno intersezione vuota; infatti se per assurdo $z \in D_\delta x \cap D_\delta y$, dalla disuguaglianza triangolare avremmo:

$$2\delta = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \delta + \delta = 2\delta.$$

Definizione di spazio T_1

Una condizione più debole dell'assioma T_2 è data dalla seguente

Definizione. Uno spazio (X, τ) si dice T_1 se, per ogni coppia di punti distinti $x, y \in X$, esistono loro intorni aperti A_x e A_y tali che

$$y \notin A_x, \; x \notin \cap A_y.$$

Teorema. Uno spazio è T_1 se e solo se ogni suo punto x è un chiuso.

Dimostrazione. Sia X uno spazio T_1 e sia $x \in X$. Poiché X è T_1, ogni $y \neq x$ ha un intorno aperto contenuto in $\complement_X \{x\}$, ovvero ogni $y \in \complement_X \{x\}$ è interno a $\complement_X \{x\}$. Dunque $\complement_X \{x\}$ è aperto, e x è chiuso.
Viceversa, se ogni x è un chiuso di X, per ogni $X \in X$ il sottoinsieme $\complement_X \{x\}$ è aperto. Pertanto ogni $y \in \complement_X \{x\}$ ha un intorno aperto contenuto in $\complement_X \{x\}$, Ciò assicura che X sia T_1.

Il confronto delle definizioni fornisce subito la seguente

Osservazione. Ogni spazio di Hausdoff è T_1.

La diagonale in $X \times X$

Esercizio: Dimostrare che uno spazio topologico è di Hausdorff se e solo se la diagonale

$$\Delta = \{(x,x),\ x \in X\} \subset X \times X$$

è un chiuso nel prodotto topologico $X \times X$.

Suggerimento. Si tenga presente che, una volta svolto l'esercizio, ci si dovrebbe convincere che la condizione Δ chiuso in $X \times X$ è solo un modo un po' sofisticato di dire che X sia di Hausdorff. Chiaramente "Δ chiuso in $X \times X$" è equivalente a

$$\complement_{(X \times X)}\, \Delta \quad \text{aperto in} \quad X \times X,$$

ovvero che ogni punto $(x,y) \in \complement_{(X \times X)}(\Delta)$ è un punto interno, e ammette quindi un intorno aperto $A_{(x,y)}$ che non interseca Δ.
Ma $(x,y) \in \complement_{(X \times X)}\, \Delta$ significa $x \neq y$, e si rifletta come sono fatti gli aperti del prodotto $X \times X \ldots\ldots$

Metrico $\Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1$

Abbiamo dunque le seguenti inclusioni tra classi di spazi topologici.

$$\{ \text{ Spazi metrici } \} \subset \{ \text{ Spazi } T_2 \} \subset \{ \text{ Spazi } T_1 \} \subset \{ \text{ Spazi topologici } \}$$

Verifichiamo con esempi che le tutte precedenti inclusioni sono proprie.

- $(\mathbb{R}, i_d)$, $i_d = \{(a, +\infty),\ a \in \mathbb{R}\}$, non verifica l'assioma T_1: se $x < y$ esiste un intorno di y che non contiene x, ma non esiste un intorno di x che non contiene y.
- $(\mathbb{R}^n, \mathcal{Z})$, topologia di Zariski (in particolare cofinita se $n = 1$), è T_1, essendo ogni punto un insieme algebrico (perché?). Ma gli aperti sono troppo "grandi" per poter separare punti distinti.
- $(\mathbb{R}, j_d)$, j_d con base gli intervalli $[a, b)$, è di Hausdorff: se $x < y$, gli aperti $[x, y)$ e $[y, +\infty)$ separano i due punti e sono disgiunti.

  Nel file "Topologie su R.pdf' abbiamo visto che la topologia j_d non è metrizzabile (e ricordiamo qui che se lo fosse avrebbe una base numerabile). Torneremo più avanti su questo punto.

Limiti di successioni

Sia (X,τ) uno spazio topologico. Una *successione* su X è un'applicazione

$$f:\mathbb{N}\to X, \qquad f(n)=x_n,$$

e come d'uso denotiamo una successione con il simbolo $\{x_n\}$.

Definizione: Sia $\{x_n\}$ una successione sullo spazio topologico (X,τ). Diciamo che $\{x_n\}$ *converge al limite* $\ell\in X$ se per ogni intorno U_ℓ di ℓ, esiste un $n_0\in\mathbb{N}$ tale che se $n>n_0$ risulta $x_n\in U_\ell$
(ovvero, più brevemente, se risulta *definitivamente* $x_n\in U_\ell$).

Se $\ell\in X$ è limite della successione $\{x_n\}$ sullo spazio topologico (X,τ), scriveremo come d'uso

$$\lim_{n\to+\infty} x_n=\ell.$$

Dimostrazione

Teorema (unicità del limite). Sia (X, τ) di Hausdorff. Allora il limite di una successione $\{x_n\}$ su (X, τ), se esiste, è unico.

La seguente dimostrazione adatta, alla presente più generale situazione, la dimostrazione dell'unicità del limite dei corsi di Analisi.
Si noterà come tale (già ben vista) dimostrazione sia di fatto motivazione per la scelta di una definizione: quella di spazio di Hausdorff.

Dimostrazione. Per assurdo, sia $\{x_n\}$ una successione sullo spazio di Hausdorff (X, τ), e siano $\ell \neq \ell'$ due suoi limiti. Allora, essendo X di Hausdorff, esistono intorni U_ℓ e $U_{\ell'}$ disgiunti dei due limiti ℓ, ℓ'. Pertanto definitivamente deve risultare:

$$x_n \in U_\ell \cap U_{\ell'} = \emptyset.$$

Successioni $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ e $\left\{(-1)^n\frac{1}{n}\right\}$

Esempio 1. Consideriamo la successione $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ sull'insieme $\mathbb{R}$ e studiamo la sua convergenza per ognuna delle seguenti nove topologie definite nel file "Topologie su R.pdf":

$$(\mathbb{R},\mathcal{E}),\ (\mathbb{R},j_d),\ (\mathbb{R},j_s),\ (\mathbb{R},\tau_{ban}),\ (\mathbb{R},\tau_{discr}),\ (\mathbb{R},i_d),\ (\mathbb{R},i_s),\ (\mathbb{R},\mathcal{Z}),\ (\mathbb{R},k).$$

- Nelle topologie $\mathcal{E}$ e j_d risulta
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0.$$
- Nelle topologie τ_{ban}, $\mathcal{Z}$ e k risulta
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=\ell,\ \text{per ogni } \ell\in\mathbb{R}.$$
- Nella topologia τ_{discr} le uniche successioni convergenti sono le successioni definitivamente costanti. Pertanto $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ non ammette limite.
- Nelle topologia j_s si vede subito che $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ non ammette limite. Non lo è $\ell=0$, il cui intorno aperto $(a,0]$, con $a<0$ non contiene alcun termine della successione, e similmente non è limite alcun $\ell<0$. Ma neanche lo è alcun $\ell>0$, i cui intorni $[\ell,\ell+\epsilon)$, se opportunamente piccoli, non contengono definitivamente i termini della successione.
- Nella topologia i_d ogni $\ell\leq 0$ è limite di $\frac{1}{n}$, mentre nella topologia i_s lo è ogni $\ell\geq 0$.

Esercizio 1. Esaminare, per ognuna delle nove precedenti topologie su $\mathbb{R}$, la convergenza della successione $\left\{(-1)^n\frac{1}{n}\right\}$.

Successioni $\{n\}$ e $\{(-1)^n\, n\}$

Esempio 2. Consideriamo ora la successione $\{n\}$, sempre sull'insieme $\mathbb{R}$ e determiniamo la sua convergenza per ognuna delle nostre nove topologie.

- Nelle topologie $\mathcal{E}$, j_d, j_s, i_s, k la successione non ammette limite (si noti che la nozione di convergenza si riferisce a punti dello spazio $\mathbb{R}$, e non include la "divergenza").
- Come sempre, nella topologia τ_{discr} le uniche successioni convergenti sono le successioni definitivamente costanti. Pertanto anche in essa $\{n\}$ non ammette limite.
- Nelle topologie τ_{ban}, $\mathcal{Z}$ e i_d risulta

$$\lim_{n\to+\infty} n = \ell, \text{ per ogni } \ell \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 2. Esaminare, per ognuna delle nove precedenti topologie su $\mathbb{R}$, la convergenza della successione $\{(-1)^n\, n\}$.

Successione $\{(-1)^n\}$

Esempio 3. Studiamo ora la successione $\{(-1)^n\}$, sempre in $\mathbb{R}$ e per ognuna delle nove topologie.

- Nelle topologie $\mathcal{E}$, j_d, j_s, e $\mathcal{Z}$ la successione non ammette limite.
- Come sempre, nella topologia τ_{discr} le uniche successioni convergenti sono le successioni definitivamente costanti. Pertanto anche in essa $\{(-1)^n\}$ non ammette limite.
- Come sempre, nelle topologia τ_{ban} risulta

$$\lim_{n\to+\infty}(-1)^n=\ell,\ \text{per ogni } \ell\in\mathbb{R}.$$

- Nella topologia i_d ogni $\ell\leq -1$ è limite di $\{n\}$, nella topologia i_s è limite ogni $\ell\geq 1$, nella topologia k ogni $\ell\leq -1$ e ogni $\ell\geq 1$.

Esercizio 3. Verificate quanto affermato nei precedenti Esempi 1,2,3 e comunicatemi eventuali miei errori nella convergenza delle successioni nelle varie topologie.

Dai precedenti esempi ...

I precedenti Esempi 1,2,3 evidenziano che nelle seguenti topologie su $\mathbb{R}$ non vale l'unicità del limite:

$$(\mathbb{R}, \tau_{ban}),\ (\mathbb{R}, i_d),\ (\mathbb{R}, i_s),\ (\mathbb{R}, \mathcal{Z}),\ (\mathbb{R}, k)$$

e pertanto tali spazi non sono di Hausdorff.

Vediamo facilmente che $(\mathbb{R}, \tau_{ban})$, $(\mathbb{R}, i_d)$, $(\mathbb{R}, i_s)$, $(\mathbb{R}, k)$ non sono neanche T_1, in quanto i punti per ognuna di esse non hanno complementare aperto, e pertanto non sono chiusi.

Nella topologia cofinita su $\mathbb{R}$ i singoli punti (che sono ovviamente sottoinsiemi finiti) sono invece chiusi, e pertanto $(\mathbb{R}, \mathcal{Z})$ è T_1.

(E si ricordi che è T_1 anche $\mathbb{R}^n$ con la topologia di Zariski, cfr. una precedente slide).

Riproposta di un esercizio

Disponendo ora, oltre che delle proprietà di prima e seconda numerabilità, anche delle proprietà topologiche di Hausdorff e T_1, riproponiamo ora il seguente esercizio contenuto nel file "Applicazioni continue.pdf".

Esercizio: Stabilire quali tra i seguenti spazi topologici sono tra loro omeomorfi e quali no:

$(\mathbb{R}, \mathcal{E})$, $(\mathbb{R}, j_d)$, $(\mathbb{R}, j_s)$, $(\mathbb{R}, \tau_{ban})$, $(\mathbb{R}, \tau_{discr})$, $(\mathbb{R}, i_d)$, $(\mathbb{R}, i_s)$, $(\mathbb{R}, \mathcal{Z})$, $(\mathbb{R}, k)$.

Nelle prossimi files tratteremo di altre proprietà topologiche (connessione, compattezza, ecc.) che costituiranno ulteriori mezzi per indagare se due spazi topologici non sono omeomorfi.

Osservazioni sui sottospazi

Proposizione. Sia S un sottospazio topologico di (X, τ). Se X è di Hausdorff (rispettivamente T_1), anche $(S, \tau|_S)$ è di Hausdorff (rispettivamente T_1).

Dimostrazione. Siano x, y punti distinti di S; poiché X è di Hausdorff, x e y ammettono intorni aperti A_x, A_y disgiunti. Allora $A_x \cap S$ e $A_y \cap S$ sono intorni disgiunti di x e di y in S. Per quanto riguarda l'ereditarietà della proprietà T_1, si usi la caratterizzazione della chiusura di ogni punto.

Ricordiamo anche (cfr. un esercizio nel file "Sottospazi.pdf")

Proposizione. Sia S un sottoinsieme di uno spazio metrico (X, d), e sia τ_d la topologia indotta dalla distanza d su X. Allora, se $d|_S$ è la restrizione della distanza d a S, risulta:

$$(\tau_d)|_S = \tau_{(d|_S)}.$$

Dunque un sottoinsieme S di uno spazio metrico X è uno spazio metrico rispetto alla restrizione a S della distanza, e in S la topologia associata alla restrizione della distanza coincide con la topologia indotta da X.

Prime osservazioni sui prodotti

Nella precedente slide abbiamo visto:

- i) Un sottospazio di uno spazio di Hausdorff è di Hausdorff;
- ii) Un sottospazio di uno spazio T_1 è T_1;
- iii) Un sottospazio di uno spazio metrico è uno spazio metrico.

Sottospazi e prodotti sono le due principali costruzioni che abbiamo visto per ottenere nuovi spazi topologici da vecchi.

Nelle prossime slides cercheremo di capire se per il prodotto valgano analoghe proprietà, ovvero:

- iv) Il prodotto di spazi di Hausdorff è di Hausdorff?
- iv) Il prodotto di spazi T_1 è T_1?
- vi) Il prodotto di spazi metrici è uno spazio metrico?

Come vedremo, per il quesito vi), dovremo distinguere se il prodotto è finito o infinito; inoltre, nel secondo caso, se vogliamo far riferimento alla topologia prodotto o alla box topology.

T_2 e prodotti

Rispondiamo affermativamente al quesito iv) della precedente slide.

Proposizione. Il prodotto di spazi di Hausdorff è di Hausdorff. Ciò vale per prodotti finiti e infiniti, e nel secondo caso sia per la topologia prodotto che per la box topology.

Dimostrazione. Sia J un insieme arbitrario di indici, finito o infinito, e sia

$$X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$$

il prodotto degli spazi di Hausdorff X_α. Siano $x = (x_\alpha), y = (y_\alpha)$ punti distinti di X. Allora per qualche α è $x_\alpha \neq y_\alpha$ e dunque, poiché X_α è di Hausdorff, esistono aperti disgiunti $A_{x_\alpha},\ A_{y_\alpha} \subset X_\alpha$ contenenti rispettivamente x_α e y_α. Posto

$$A_{x_\beta} = \begin{cases} A_{x_\alpha}, & \beta = \alpha \\ X_\beta, & \beta \neq \alpha \end{cases} \quad , \qquad A_{y_\beta} = \begin{cases} A_{y_\alpha}, & \beta = \alpha \\ X_\beta, & \beta \neq \alpha \end{cases} \quad ,$$

ne segue che i seguenti sottoinsiemi di X:

$$A_x = \prod_{\beta \in J} A_{x_\beta}, \qquad A_y = \prod_{\beta \in J} A_{y_\beta}$$

sono intorni aperti rispettivamente di x e di y e sono disgiunti. Si noti che, nel caso di prodotto infinito, A_x e A_y sono intorni aperti sia per la topologia prodotto che per la box topology.

T_1 e prodotti

Rispondiamo ora affermativamente al quesito v).

Proposizione. Il prodotto di spazi di T_1 è T_1. Ciò vale per prodotti finiti e infiniti, e nel secondo caso sia per la topologia prodotto che per la box topology.

Dimostrazione. Sia J un insieme arbitrario di indici, finito o infinito, e sia ancora

$$X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$$

il prodotto degli spazi X_α, che qui supponiamo essere T_1. Si tratta ora di dimostrare che ogni $x = (x_\alpha) \in X$ è un chiuso, partendo dall'ipotesi che tutti gli x_α sono chiusi nei rispettivi fattori X_α. Siano dunque

$$\complement_\alpha = \complement_{X_\alpha} x_\alpha$$

e si osservi che posto

$$A_{\beta_\alpha} = \begin{cases} \complement_\alpha, & \beta = \alpha \\ X_\beta, & \beta \neq \alpha \end{cases}$$

ne segue che $A_x = \bigcup_{\alpha \in J} \prod_{\beta_\alpha \in J} A_{\beta_\alpha}$ è un aperto in X (nel caso di prodotto infinito, sia per la topologia prodotto che per la box topology). Ne segue che x è un chiuso in X.

Distanze e prodotti finiti

Affrontiamo ora il quesito vi), che nel caso di prodotti finiti ha anch'esso risposta affermativa.

Siano $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$ spazi metrici, e sia $X = X_1 \times \cdots \times X_n$, l'insieme prodotto cartesiano, i cui elementi denotiamo con

$$x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in X.$$

Definiamo l'applicazione

$$d : X \times X \to \mathbb{R}, \qquad d(x, y) = \max_{i=1,\ldots,n} d_i(x_i, y_i)$$

ed è verifica immediata che d è una distanza su X.

Definizione. (X, d) si dice *spazio metrico prodotto* dei fattori $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$.

Esercizio. Verificare la seguente uguaglianza di topologie; si suggerisce di usare i dischi definiti sui fattori X_i dalle distanze d_i e i dischi definiti sul prodotto cartesiano X dalla distanza d:

$$\tau_d = \tau_{d_1} \times \cdots \times \tau_{d_n}.$$

Un'osservazione

Osservazione. Per ogni naturale $p \geq 1$ possiamo in alternativa definire su

$$X = X_1 \times \cdots \times X_n,$$

la seguente distanza ("euclidea" per $p = 2$):

$$d_p : X \times X \to \mathbb{R}, \qquad d_p(x, y) = \left(d_1(x_1, y_1)^p + \cdots + d_p(x_n, y_n)^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si noterà che si tratta di un'estensione di quanto visto in Analisi I (cfr. Appunti "Spazi metrici" del Prof. Orsina). Per $p \to +\infty$ si ottiene:

$$d_\infty(x, y) = d(x, y) = \max_{i=1,\ldots,n} \Big(d_1(x_1, y_1), \ldots, d_n(x_n, y_n)\Big).$$

Similmente a quanto visto in Analisi I per $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$, per ogni $p \geq 1$ e $p = +\infty$, d_p è una distanza sul prodotto $X = X_1 \times \cdots \times X_n$. Inoltre, la topologia τ_{d_p} associata alla distanza d_p non dipende da p. Essa coincide dunque con la topologia τ_d sopra considerata.

Osservazioni generali

Nel discutere se sia possibile definire una distanza sul prodotto infinito di spazi metrici (precedente quesito vi), ci limiteremo al caso in cui gli spazi fattori tutti rette euclidee $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$. Lo spazio prodotto sarà dunque del tipo

$$\mathbb{R}^J = \prod_{\alpha \in J} \mathbb{R}_\alpha$$

con tutti i fattori $\mathbb{R}_\alpha = \mathbb{R}$, e l'insieme J di indici infinito.

In particolare, se J è numerabile (risp. continuo), possiamo assumere $J = \mathbb{N}$ (risp. $J = \mathbb{R}$); nei due casi gli insiemi prodotto risultano essere:

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \big\{\text{successioni } \{x_n\} \text{ su } \mathbb{R}\big\}$$

$$\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \big\{\text{funzioni } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\big\}$$

dove naturalmente alle funzioni f non si richiede alcuna continuità.

Distanza su $\mathbb{R}$ "tagliata a 1" e distanza uniforme

Per definire una distanza sul prodotto infinito $\mathbb{R}^J$, conviene partire dalla seguente *distanza euclidea tagliata a* 1 *su* $\mathbb{R}$:

$$\bar{d}(x,y) = \min \begin{cases} |x-y| \\ \quad 1 \end{cases} ; \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

ed è immediata la verifica per $\bar{d}$ delle proprietà delle distanze.

Per ogni coppia di elementi $x = \{x_\alpha\}_{\alpha \in J}$ e $y = \{y_\alpha\}_{\alpha \in J} \in \mathbb{R}^J$, estendiamo la definizione:

$$\bar{d} : \mathbb{R}^J \times \mathbb{R}^J \to \mathbb{R}, \qquad \bar{d}(x,y) = \sup_{\alpha \in J} \left\{ \bar{d}(x_\alpha, y_\alpha) \right\},$$

e tale $\bar{d}$ è detta la *distanza uniforme* su $\mathbb{R}^J$.

La topologia τ_D indotta dalla distanza D su $\mathbb{R}^J$ si dice *topologia uniforme*.

Successioni di funzioni

Similmente a quanto visto nei corsi di Analisi, diamo la seguente

Definizione. Sia $\{f_n\} : J \to Y$ una successione di funzioni dall'insieme J allo spazio metrico (Y, d): Diciamo che $\{f_n\}$ *converge uniformemente* alla funzione $f : J \to Y$ se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che risulta $d\big(f_n(x), f(x)\big) < \epsilon$ per ogni $n > n_0$ e per ogni $x \in J$.

La nozione di convergenza uniforme della successione di funzioni $\{f_n(x)\}$ è legata alla metrica uniforme su $\mathbb{R}^J$. Infatti:

Esercizio. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

i) La successione di funzioni $f_n(x) : J \to \mathbb{R}$ converge uniformemente alla funzione $f(x) : J \to R$ (rispetto alla distanza euclidea della retta $\mathbb{R}$);
ii) La successione di punti $f_n \in \mathbb{R}^J$ converge al punto $f \in \mathbb{R}^J$, rispetto alla distanza uniforme su $\mathbb{R}^J$.

Topologie prodotto, uniforme e box

In questa e nelle successive slides daremo solo degli enunciati. Parte delle dimostrazioni sono oggetto del Foglio n. 3 di esercizi.

Proposizione. Le tre topologie su $\mathbb{R}^J$ che abbiamo considerato sono ordinate, nella relazione $<$ di minore finezza, nel modo seguente:

$$(\mathbb{R}^J, \tau_{prod}) < (\mathbb{R}^J, \tau_{\bar{d}}) < (\mathbb{R}^J, \tau_{box}),$$

e dunque la topologia uniforme è intermedia, nella relazione di finezza, tra topologia prodotto e topologia box.

Riguardo alla metrizzabilità delle topologie prodotto e box abbiamo i seguenti teoremi.

Teorema 1. Per ogni J infinito, lo spazio topologico $(\mathbb{R}^J, \tau_{box})$ non soddisfa il primo assioma di numerabilità, e pertanto non è metrizzabile.

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ come spazio metrico

Teorema 2. Per ogni J infinito non numerabile, lo spazio topologico $(\mathbb{R}^J, \tau_{prod})$ non soddisfa il primo assioma di numerabilità, e pertanto non è metrizzabile.

Se J è numerabile (e in tal caso non è restrittivo porre $J = \mathbb{N}$) è invece possibile definire la seguente distanza; qui $x = (x_n), y = (y_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

$$D : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}, \qquad D(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{\bar{d}(x_n, y_n)}{n} \right\},$$

e ricordiamo che la distanza uniforme è invece definita dalla formula:

$$\bar{d}(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \bar{d}(x_n, y_n) = \min \begin{cases} |x_n - y_n| \\ 1 \end{cases} \right\}.$$

Teorema 3. Su $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, la topologia τ_D associata alla distanza D coincide con la topologia prodotto τ_{prod}.

Metrizzabilità di R^J

Riguardo al quesito vi), che in una slide precedente chiedeva se il prodotto infinito di spazi metrici risultasse metrizzabile, abbiamo esaminato solo il caso del prodotto

$$\mathbb{R}^J = \prod_{\alpha \in J} \mathbb{R}_\alpha,$$

con tutti i fattori $\mathbb{R}_\alpha = \mathbb{R}$, e l'insieme J di indici infinito.

La seguente è una sintesi di quanto riportato nelle ultime slides.

- Su $\mathbb{R}^J$ si può definire una distanza $\bar{d}$, e la topologia associata $\tau_{\bar{d}}$, chiamata topologia uniforme, è di finezza intermedia tra la topologia prodotto e la box topology su $\mathbb{R}^J$.
- Su $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ è possibile definire una distanza D, che induce la topologia prodotto. Se invece J ha cardinalità non numerabile, la topologia prodotto non è metrizzabile.
- Per ogni J infinito, la box topology su $\mathbb{R}^J$ non è metrizzabile.