

# Quozienti topologici

P. Piccinni

Corso di Geometria II (A-L), a.a. 2019-20  
Laurea Triennale in Matematica  
Sapienza Università di Roma Classroom - codice 24bsdao

Lezione del 7 aprile 2020, durata 2 ore  
Lezione del 21 aprile 2020, durata 2 ore

1

## Quozienti

- Introduzione
- Topologia immagine diretta
- Proprietà della topologia immagine diretta
- Topologia quoziente
- Quozienti e proprietà topologiche
- Un quoziente non di Hausdorff
- Sottoinsiemi saturi e saturazione

2

## Esempi

- Spazi proiettivi reali
- Sfere come quozienti
- Sfere e spazi proiettivi reali
- $P^2(\mathbb{R})$  e coffee break
- Spazi proiettivi complessi
- Fibrazione di Hopf

3

## Altri esempi e cenni su rivestimenti e gruppo fondamentale

- $S^1$  come quoziente di  $\mathbb{R}$
- Un disegno
- Un cenno sui rivestimenti
- Un cenno sul gruppo fondamentale
- Qualche proprietà
- Dove approfondire
- Il rivestimento  $S^n \rightarrow P^n(\mathbb{R})$
- Tori  $T^n$  come quozienti
- Il toro  $T^2$  in  $\mathbb{R}^3$

# Il problema dei quozienti topologici

La costruzione dei **quozienti topologici** completa in qualche modo una **trilogia**, iniziata con i **sottospazi topologici** e i **prodotti topologici**. Sottospazi, prodotti e quozienti topologici costituiscono infatti utili e naturali costruzioni "di nuovi spazi topologici da vecchi", con motivazioni che nei tre casi vengono anche dal poter includere importanti esempi.

Per quanto riguarda i quozienti, è opportuno tener presente da subito gli esempi degli **spazi proiettivi reali e complessi**, le cui definizioni sono state date a Geometria 1. Le proiezioni

$$\pi_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow P^n(\mathbb{R}), \quad \pi_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow P^n(\mathbb{C}),$$

associano a  $(n+1)$ -ple ordinate non nulle risp. reali  $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  e complesse  $(z_0, z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ , le loro classi di proporzionalità risp.

$$[x_0, x_1, \dots, x_n] \in P^n(\mathbb{R}), \quad [z_0, z_1, \dots, z_n] \in P^n(\mathbb{C}),$$

che sono per definizione le coordinate proiettive omogenee dei punti risp. di  $P^n(\mathbb{R})$  e di  $P^n(\mathbb{C})$ .

Assegnate le topologie euclidee negli "spazi proiettanti"  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  e  $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$  (quest'ultimo visto come  $\mathbb{R}^{2n+2} - \{0\}$ ), ci si chiede se sia possibile "proiettare" tali topologie euclidee sugli spazi proiettivi risp.  $P^n(\mathbb{R})$  e  $P^n(\mathbb{C})$ . Saranno questi esempi di **quozienti topologici**, che si noti non appaiono né come sottospazi né come prodotti di altri noti spazi topologici.

## Costruzione (apparentemente) più generale ...

Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico, sia  $Z$  un insieme, e sia

$$f : X \rightarrow Z$$

un'applicazione tra insiemi. Osserviamo che su  $Z$  esistono certamente delle topologie che rendono continua la  $f$ , per esempio la topologia banale. Essendo infatti  $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ ,  $f^{-1}(Z) = X$ , le controimmagini mediante  $f$  degli aperti di  $(Z, \tau_{ban})$  risultano aperte in  $X$ . Dimostriamo la seguente:

**Proposizione.** Tra le topologie su  $Z$  che rendono continua la  $f$  ve ne è una più fine di tutte. Essa è la **topologia immagine diretta**, definita così:

$$f(\tau) = \{A \subset Z, f^{-1}(A) \in \tau\}.$$

Dim. Che  $f(\tau)$  sia una topologia dipende dalla commutabilità delle operazioni di unione e intersezione rispetto alle controimmagini (segnalata all'inizio del corso). D'altra parte ogni topologia che rende continua la  $f$  deve contenere tutti i sottoinsiemi  $A \subset Z$  tali che  $f^{-1}(A) \in \tau$ .

$f : X \rightarrow Z$  e proprietà di  $f(\tau)$ 

Sia

$f : X$  (spazio topologico)  $\rightarrow Z$  (insieme).

Le seguenti proprietà sono immediate:

- $F \subset Z$  è chiuso se e solo se  $F' = f^{-1}(F)$  è chiuso in  $X$ .
- Se  $g : Z \rightarrow W$  (insieme), allora  $(g \circ f)(\tau) = g(f(\tau))$ .

**Osservazione importante.** Si noti che assegnata come sopra un'applicazione  $f : X \rightarrow Z$ , la topologia immagine diretta  $f(\tau)$  su  $Z$ , se ristretta al complementare  $\complement_Z f(X)$  dell'immagine di  $f$ , risulta essere la topologia discreta. In formula:

$$f(\tau)|_{\complement_Z f(X)} = \text{topologia discreta su } \complement_Z f(X).$$

Dimostrazione. Infatti per ogni  $z \in \complement_Z f(X)$ , risulta  $f^{-1}(z) = \emptyset \in \tau$ .

$f : X \rightarrow Z$  suriettiva

Tenuto conto della precedente osservazione, possiamo assumere che

$$f : X \rightarrow Z$$

sia suriettiva dallo spazio topologico  $X$  (con topologia  $\tau$ ) all'insieme  $Z$ .

**Definizione.** La topologia  $f(\tau)$  su  $Z$ , immagine diretta di una  $f : X \rightarrow Z$  suriettiva si dice *topologia quoziente* definita dalla proiezione  $f$ .

Ricordiamo, dalla teoria degli insiemi, che ogni applicazione suriettiva

$$f : X \rightarrow Z$$

di insiemi può essere pensata come *identificazione* o *proiezione sul quoziente* di  $X$  modulo la seguente equivalenza  $\sim_f$  (dove  $x, x' \in X$ )

$$x \sim_f x' \Leftrightarrow f(x) = f(x').$$

Si ha infatti la biiezione con l'insieme quoziente  $X/\sim_f$  di  $X$  modulo  $\sim_f$

$$X/\sim_f \leftrightarrow Z \quad \text{data da} \quad [x] \in X/\sim_f \leftrightarrow f(x) \in Z.$$

# Equivalenza in $X$ e proiezione sul quoziente

Viceversa, se assegniamo sull'insieme sostegno  $X$  di uno spazio topologico  $(X, \tau)$  un relazione di equivalenza  $\sim$ , otteniamo sull'insieme quoziente

$$X/\sim = \{\text{classi di equivalenza in } X \text{ modulo } \sim\}$$

la topologia quoziente  $\pi(\tau)$ , dove

$$\pi : X \rightarrow X/\sim$$

è la proiezione  $x \in X \rightarrow \pi(x) = [x]_{\sim}$  di ogni elemento  $x \in X$  sulla sua classe di equivalenza.

Per completare il confronto con quanto detto nella precedente slide, osserviamo che se  $\sim$  è l'equivalenza in  $X$  e  $\pi$  la proiezione sul quoziente, risulta

$$\sim = \sim_{\pi}$$

ovvero l'equivalenza  $\sim$  assegnata su  $X$  coincide con l'equivalenza  $\sim_{\pi}$  definita dall'applicazione suriettiva

$$\pi : X \rightarrow X/\sim$$

di proiezione sul quoziente.

In conclusione, ai fini di definire la topologia quoziente, i due approcci dell'applicazione suriettiva  $f : X \rightarrow Z$  e dell'equivalenza  $\sim$  su  $X$  sono del tutto intercambiabili.

# Proprietà dei quozienti

**Proposizione.** Sia  $X$  uno spazio topologico e sia  $\sim$  una relazione di equivalenza su  $X$ . Sia  $Z = X/\sim$  lo spazio topologico quoziente. Allora:

- Se  $X$  è compatto, anche il quoziente  $Z = X/\sim$  è compatto.
- Se  $X$  è connesso (risp. connesso per archi), anche il quoziente  $Z = X/\sim$  è connesso (risp. connesso per archi).
- Se  $X$  è di Hausdorff, il quoziente  $Z = X/\sim$  può essere o non essere di Hausdorff.

**Dimostrazione.** Le affermazioni su compattezza, connessione, e connessione per archi, che "passano al quoziente" sono dovute al fatto che tali proprietà sono conservate per applicazioni continue, passando alle loro immagini (cfr. files "Connessione.pdf" e "Compattezza.pdf").

Per quanto riguarda la proprietà di Hausdorff, non sorprenderà il fatto che p. es. lo spazio proiettivo  $P^n(\mathbb{R})$ , quoziente dello spazio di Hausdorff  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ , è anch'esso di Hausdorff. La sua topologia quoziente è infatti tale che la sua restrizione a ognuno degli spazi affini  $\mathbb{R}^n$  che si ottengono privando  $P^n(\mathbb{R})$  di un iperpiano, risulta essere la usuale topologia euclidea di  $\mathbb{R}^n$ .

Nella prossima slide daremo invece un esempio in cui una topologia di Hausdorff non passa al quoziente.



# Controesempio

**Proposizione.** Si consideri in  $(\mathbb{R}, \mathcal{E})$  la relazione di equivalenza

$$x \sim y \Leftrightarrow xy > 0,$$

e naturalmente  $0 \sim 0$ . Allora  $\mathbb{R}/\sim$  non è di Hausdorff.

**Dimostrazione.** Si noti che l'insieme quoziente  $\mathbb{R}/\sim$  consiste di tre punti:  $+$ ,  $0$ ,  $-$ , rispettivamente  $+$  è la classe degli  $x \in \mathbb{R}$  positivi, poi  $0$  è la classe che consiste solo dello  $0$ , e infine  $-$  è la classe degli  $x \in \mathbb{R}$  negativi. La topologia quoziente consiste dei sottoinsiemi di  $\mathbb{R}/\sim$  i cui rappresentanti in  $\mathbb{R}$  costituiscono aperti euclidei. Poiché in  $\mathbb{R}$  sono aperti intervalli  $(-\infty, 0)$  e  $(0, +\infty)$ , ma non è aperto il punto  $0$ , risulta:

$$\tau(\mathcal{E}) = \{\emptyset, \{+\}, \{-\}, \{+, -\}, \mathbb{R}/\sim\}.$$

Ne segue che i punti  $+$  e  $0$  del quoziente non ammettono aperti disgiunti che li contengono. Si noti che il quoziente non è neanche  $T_1$ .

# Aperti saturi e saturazione

Dalla precedente costruzione  $(X, \tau) \rightarrow (X/\sim, \pi(\tau))$ :

$$A \subset X/\sim \text{ aperto in } \pi(\tau) \Leftrightarrow \pi^{-1}(A) \subset X \text{ aperto in } X$$

appare che lo spazio  $X$  che si quozienta ha dei particolari aperti: gli  $A' \subset X$  tali che  $A' = \pi^{-1}(A)$ .

Essi sono detti *aperti saturi* di  $X$  (rispetto all'equivalenza  $\sim$ ).

**Definizione.** Più in generale, un sottoinsieme  $S \subset X$  si dice *saturo* (rispetto all'equivalenza  $\sim$ ) se esiste un  $S' \subset X/\sim$  tale che  $S = \pi^{-1}(S')$ .

**Definizione.** Dato un sottoinsieme  $T \subset X$  si dice *saturazione di  $T$*  (rispetto all'equivalenza  $\sim$ ) il sottoinsieme  $S \subset X$  definito da  $S = \pi^{-1}(\pi(T))$ .

**Esercizio.** Dimostrare che il sottoinsieme  $S \subset X$  è saturo rispetto all'equivalenza  $\sim$  se e solo se coincide con la sua saturazione, ovvero se e solo se  $S = \pi^{-1}(\pi(S))$ .

Nelle prossime slides vedremo diversi esempi di quozienti topologici. Per essi evidenzieremo gli aperti saturi e le saturazioni.

# Definizione

Un primo esempio di quoziente, già citato in queste slides, è dato dallo spazio proiettivo reale  $P^n(\mathbb{R})$ . La sua topologia euclidea quoziente è ottenuta per la proiezione  $\pi_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow P^n(\mathbb{R})$  dell'equivalenza

$$(x_0, x_1, \dots, x_n) \sim (x'_0, x'_1, \dots, x'_n) \Leftrightarrow (x_0, x_1, \dots, x_n) = \lambda(x'_0, x'_1, \dots, x'_n),$$

con  $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ . Dunque:

$$\pi_{\mathbb{R}} : (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow [x_0, x_1, \dots, x_n] \in P^n(\mathbb{R})$$

dove  $[x_0, x_1, \dots, x_n]$  sono le coordinate proiettive omogenee in  $P^n(\mathbb{R})$ .

Se  $T$  è un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ , la sua saturazione  $S = \pi^{-1}(\pi(T))$  risulta essere il cono (bilatero)  $\Gamma_T$  proiettante  $T$  dall'origine  $\{0\}$  di  $\mathbb{R}^{n+1}$ , e privato dell'origine stessa. In particolare, gli aperti saturi sono i coni aperti  $\Gamma$  di  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ , con vertice l'origine, che come sopra non fa parte del cono.

# Proprietà

Per quanto riguarda le proprietà topologiche, osserviamo quanto segue

- $P^n(\mathbb{R})$  è di Hausdorff. È infatti possibile separare punti distinti  $p, q \in P^n(\mathbb{R})$  mediante aperti disgiunti. Per riconoscere ciò, osserviamo che  $p, q \in P^n(\mathbb{R})$  distinti sono definiti da rette vettoriali distinte risp.  $P$  e  $Q$  di  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Esistono dunque in  $\mathbb{R}^{n+1}$  coni aperti  $\Gamma_P$  e  $\Gamma_Q$  di vertice l'origine (e senza l'origine!) e di assi le rette  $P$  e  $Q$  tali che  $\Gamma_P \cap \Gamma_Q = \emptyset$ . Proiettando su  $P^n(\mathbb{R})$  gli aperti saturi  $\Gamma_P$  e  $\Gamma_Q$ , si ottengono aperti su  $P^n(\mathbb{R})$  che separano  $p$  e  $q$ .
- $P^n(\mathbb{R})$  è connesso e connesso per archi. Ciò segue per passaggio al quoziente dalla connessione e connessione per archi di  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ .
- $P^n(\mathbb{R})$  è peraltro un esempio di varietà topologica di dimensione  $n$ , cfr. esercizio 2(f) del Foglio 5 (da svolgere).
- Non siamo invece ancora in grado di verificare l'annunciata compattezza dello spazio proiettivo  $P^n(\mathbb{R})$ , che costituisce una compattificazione dello spazio affine  $\mathbb{R}^n$ .

## Definizione e descrizione

Una variante del precedente quoziente si ottiene considerando su  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  la seguente equivalenza

$$(x_0, x_1, \dots, x_n) \sim_{>0} (x'_0, x'_1, \dots, x'_n) \Leftrightarrow (x_0, x_1, \dots, x_n) = \mu(x'_0, x'_1, \dots, x'_n),$$

ma ora con  $\mu \in \mathbb{R}^+$ . In questo caso il quoziente è dato dalla sfera  $S^n$ , pensata come spazio delle rette orientate (o equivalentemente delle semirette) per l'origine di  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

La sua topologia quoziente su  $S^n$ , è dunque ottenuta per la proiezione

$$\pi_{>0} : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow S^n.$$

Essa è dunque generata dalle calotte aperte su  $S^n$  - per definizione gli aperti le cui contro-immagini sono gli aperti saturi coni circolari aperti di  $\mathbb{R}^{n+1}$  - e tale topologia quoziente coincide pertanto con la topologia euclidea del sottospazio  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ .

## Confronto

Il confronto tra le precedenti due equivalenze su  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$

$$\vec{x} \sim \vec{x}' \Leftrightarrow \vec{x} = \lambda \vec{x}' \quad \vec{x} \sim_{>0} \vec{x}' \Leftrightarrow \vec{x} = \mu \vec{x}',$$

con  $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$  e  $\mu \in \mathbb{R}^+$ , mostra che l'equivalenza  $\sim$  può essere ottenuta componendo l'equivalenza  $\sim_{>0}$  con la seguente equivalenza tra i punti di  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ :

$$x \sim_{\pm} x' \Leftrightarrow x = \pm x'.$$

Ne segue che la proiezione  $\pi_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow P^n(\mathbb{R})$  sullo spazio proiettivo si fattorizza nella composizione di due proiezioni su quozienti:

$$(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) \xrightarrow{\pi_{>0}} S^n \xrightarrow{\pi_{\pm}} P^n(\mathbb{R}).$$

**Modello topologico dello spazio proiettivo reale.**  $P^n(\mathbb{R})$  è omeomorfo a una sfera  $S^n$  con i punti diametralmente opposti identificati. Ne segue che  $P^n(\mathbb{R})$ , quoziente del compatto  $S^n$ , è compatto.

# Modello topologico

Dal precedente modello, per  $n = 2$  si deduce che  $P^2(\mathbb{R})$  è omeomorfo alla sfera  $S^2$  con i punti diametralmente opposti identificati. Volendo scegliere un solo rappresentante per ogni classe di equivalenza, si può dire che **un modello topologico di  $P^2(\mathbb{R})$  è un emisfero con metà del suo bordo equatoriale, e un estremo sì e uno no di tale mezzo equatore**, cfr. Figura 1.

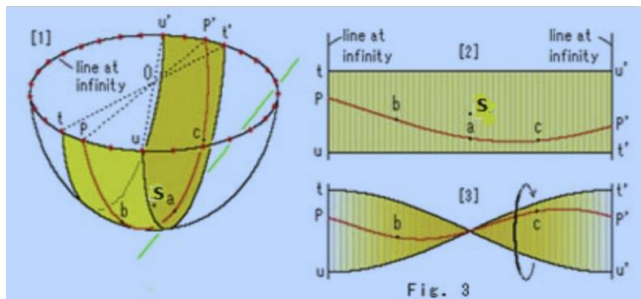


Figura 1

# Una tazza difficile!

Il piano proiettivo  $P^2(\mathbb{R})$  sembra dunque una tazza. Seguendo un'idea del mio collega Roberto Pignoni, dato che è ora del coffee break, vorremmo usare questa tazza per un caffè. Questo però non è possibile per varie ragioni. Precisamente:

- La tazza non ha manico. Questo, come si sa, non è un problema per bere il caffè.
- La tazza non ha bordo. Infatti i punti del mezzo equatore, apparente bordo, sono identificati con quelli dell'altro mezzo equatore mancante. Del resto  $P^2(\mathbb{R})$  è una varietà topologica, e dunque non vi sono punti di bordo per accostare la bocca.
- Anche se senza bordo,  $P^2(\mathbb{R})$  è pur sempre una tazza. Per bere il caffè, si può creare un bordo, tagliando un disco (in una varietà topologica ce ne sono tanti ...).
- Ma se taglio un disco da  $P^2(\mathbb{R})$ , ciò che rimane è un nastro di Möbius, vedi sotto (\*). Cfr. anche precedente Figura 1. Ed è impossibile bere un caffè da un nastro di Möbius!
- Dunque niente coffee break!

(\*) Sappiamo da Geometria I che in  $P^2(\mathbb{R})$  le coniche generali a punti reali sono equivalenti. Dunque l'ellisse  $x^2 + y^2 = 1$  è proiettivamente equivalente all'iperbole  $x^2 - y^2 = 1$ , e togliere il disco  $x^2 + y^2 < 1$  da  $P^2(\mathbb{R})$  equivale a togliere il disco  $x^2 - y^2 > 1$ . Ciò che rimane, "parte del piano proiettivo compresa tra i due rami dell'iperbole", è un nastro di Möbius.



# Definizione

E ora lo spazio proiettivo complesso  $P^n(\mathbb{C})$ . Dunque la proiezione

$$\pi_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow P^n(\mathbb{C})$$

definita dall'equivalenza

$$(z_0, z_1, \dots, z_n) \sim (z'_0, z'_1, \dots, z'_n) \Leftrightarrow (z_0, z_1, \dots, z_n) = \lambda(z'_0, z'_1, \dots, z'_n),$$

con  $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ . Dunque:

$$\pi_{\mathbb{C}} : (z_0, z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow [z_0, z_1, \dots, z_n] \in P^n(\mathbb{C})$$

dove  $[z_0, z_1, \dots, z_n]$  sono le coordinate proiettive omogenee in  $P^n(\mathbb{C})$ .

- Ne segue che anche  $P^n(\mathbb{C})$  è connessa e connessa per archi.
- È anche facile vedere, usando gli aperti saturi, che  $P^n(\mathbb{C})$  è di Hausdorff. Infine, che  $P^n(\mathbb{C})$  è una varietà topologica di dim.  $2n$ .
- Vedremo tra breve che (come  $P^n(\mathbb{R})$ ) anche  $P^n(\mathbb{C})$  è compatto.

$P^n(\mathbb{C})$  come quoziente di  $S^{2n+1}$ 

Anche nella proiezione

$$\pi_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow P^n(\mathbb{C})$$

possiamo ravvisare l'intermediazione di una sfera. Possiamo infatti scrivere

$$(\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) \equiv (\mathbb{R}^{2n+2} - \{0\}) \xrightarrow{\pi_{>0}} S^{2n+1} \xrightarrow{\pi_{S^1}} P^n(\mathbb{C}),$$

utilizzando in primo luogo l'equivalenza

$$(\vec{z} = \vec{x} + i\vec{y}) \sim_{>0} (\vec{z}' = \vec{x}' + i\vec{y}') \Leftrightarrow \vec{z} = \mu\vec{z}',$$

essendo  $\mu \in \mathbb{R}^+$ . La seconda equivalenza  $\sim_{S^1}$ , ora su  $S^{2n+1} \subset \mathbb{R}^{2n+2}$ , e che permette di scrivere

$$\pi_{\mathbb{C}} = \pi_{S^1} \circ \pi_{>0}$$

è invece definita così.

$P^n(\mathbb{C})$  come quoziente di  $S^{2n+1}$ 

Definiamo dunque l'equivalenza  $\sim_{S^1}$  su  $S^{2n+1} \subset \mathbb{R}^{2n+2}$ , e ricordiamo che deve essere

$$\pi_{\mathbb{C}} = \pi_{S^1} \circ \pi_{>0}$$

Siano  $\vec{z} = \vec{x} + i\vec{y}$ ,  $\vec{z}' = \vec{x}' + i\vec{y}' \in S^{2n+1} \subset (\mathbb{R}^{2n+2} - \{0\}) \equiv (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\})$ .

Allora

$$\vec{z} \sim_{S^1} \vec{z}' \Leftrightarrow \vec{z} = \nu \vec{z}'$$

dove ora  $\nu \in S^1 \subset \mathbb{C}$ , ovvero (ricordando che  $|\vec{z}| = |\vec{z}'| = 1$ )  $\nu$  è un numero complesso di modulo 1.

La proiezione

$$S^{2n+1} \xrightarrow{\pi_{S^1}} P^n(\mathbb{C}),$$

si chiama *fibrazione di Hopf*. Da essa segue subito che, poiché la sfera  $S^{2n+1}$  è compatta, anche lo spazio proiettivo complesso  $P^n(\mathbb{C})$  è compatto.

# Un esercizio del Foglio 5: $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$

Nel Foglio 5 di esercizi trovate interessanti esempi di quozienti; in questa e nelle successive slides illustreremo alcuni aspetti dell'esercizio 4, parte c.

Un esempio molto interessante di quoziente è fornito dalla relazione di equivalenza sulla retta euclidea  $\mathbb{R}$

$$x \sim x' \iff x - x' \in \mathbb{Z}$$

La topologia euclidea  $\mathcal{E}$  di  $\mathbb{R}$  si proietta dunque al quoziente

$$\mathbb{R}/\sim = \mathbb{R}/\mathbb{Z},$$

dove la seconda notazione ci ricorda che il quoziente è anche quoziente del gruppo abeliano additivo  $\mathbb{R}$  modulo il sottogruppo (ovviamente normale)  $\mathbb{Z}$ . Dunque  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  è simultaneamente gruppo quoziente e spazio topologico quoziente ed è dunque un *gruppo topologico quoziente*.

Per l'identificazione (richiesta dall'esercizio 4, parte c, del Foglio 5) di  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  con la circonferenza  $S^1$  si tenga presente che la somma in  $\mathbb{R}$  modulo interi può pensarsi come somma angolare: gli angoli infatti hanno la proprietà che, se  $t \in [0, 1]$ , allora  $2\pi t \in [0, 2\pi]$ , e dunque (modulo il prodotto per  $2\pi$ ) per  $t \in [0, 1]$  viene percorso un angolo giro.

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$$

Dicevamo che l'esercizio 4, parte c, del Foglio 5 chiede di riconoscere che il quoziente  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  è isomorfo some gruppo e omeomorfo come spazio topologico alla circonferenza  $S^1$ , che è gruppo moltiplicativo de numeri complessi di modulo 1.

La seguente Figura 2 illustra la proiezione di  $\mathbb{R}$  sul quoziente  $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$ .

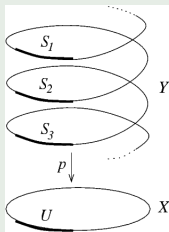


Figura 2 (da WikiCommons)

La retta  $\mathbb{R}$  è qui denotata con  $Y$ , il quoziente  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  con  $X$ , la proiezione  $\pi$  con  $p$ .

Nella terminologia dei *rivestimenti topologici* (cfr. successive slides)  $Y$  è lo *spazio che riveste*,  $X$  lo *spazio rivestito*,  $p$  la *proiezione di rivestimento*.

Sempre con le notazioni in figura,  $U$  è un *intorno ben rivestito*, e ciò significa che

$$p^{-1}(U) = \dots \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \dots, \text{ e per ogni } \alpha \in \mathbb{Z}, \quad p|_{S_\alpha} : S_\alpha \rightarrow U \text{ è un omeomorfismo.}$$

# Rivestimento universale di $S^1$

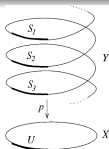


Figura 2 (da WikiCommons)

Analiticamente, la proiezione  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  (ovvero con le notazioni della figura  $p : Y \rightarrow X$ ) è data dalla formula:

$$t \in \mathbb{R} \longrightarrow e^{2\pi it} = \cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t) \in S^1 \subset \mathbb{C}$$

e, poiché  $\mathbb{R}$  è *semplicemente connesso*, la precedente proiezione costituisce il cosiddetto *rivestimento universale* di  $S^1$ .

Vi inviterei ora a rileggere la definizione di **insieme semplicemente connesso** di  $\mathbb{R}^n$  sulle vostre dispense di Analisi II.

Vedi A. Garroni - A. Malusa, Appunti di Analisi Matematica II, Definizione VII 2.26 e gli esempi successivi.

Rileggete negli stessi Appunti anche le definizioni VII 2.22 e VII 2.23, relative all' **importante relazione di omotopia tra curve**, su cui si basa la nozione di semplice connessione. Nelle slides successive useremo la relazione di omotopia tra curve chiuse, che consente di definire il gruppo fondamentale  $\pi_1(X)$  di uno spazio topologico  $X$  connesso per archi.

## Il gruppo fondamentale

In topologia si associa ad ogni spazio topologico  $X$  connesso per archi, un gruppo  $\pi_1(X)$ , detto **gruppo fondamentale** di  $X$ .

La definizione (più o meno) formale è la seguente:

$$\pi_1(X) = \{\text{classi di omotopia di archi chiusi } \gamma : [0, 1] \subset \mathbb{R} \rightarrow X, \quad \gamma(0) = \gamma(1) = x_0 \in X\}.$$

L'operazione di gruppo è la composizione di archi chiusi (prima uno poi l'altro, riparametrizzando), operazione compatibile con la relazione di omotopia tra archi.

$X$  connesso per archi consente facilmente di dimostrare che il gruppo  $\pi_1(X)$  dipende da  $x_0 \in X$  solo a meno di isomorfismi.

Inoltre si associa ad ogni  $f : X \rightarrow Y$  continua tra spazi topologici connessi per archi un omomorfismo di gruppi  $f_* : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$  in modo tale che:

$$f : X \rightarrow Y \text{ omeomorfismo di spazi topologici}$$



$$f_* : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y) \text{ isomorfismo di gruppi.}$$

# Proprietà del gruppo fondamentale

Da quanto sopra, e da altre osservazioni, segue che:

- Il gruppo fondamentale  $\pi_1(X)$  è un invariante topologico di  $X$ . Intuitivamente, esso misura quanto  $X$  non è semplicemente connesso.
- $\pi_1(X)$  può essere finito, infinito, abeliano o non abeliano.
- La teoria dei rivestimenti topologici è fortemente legata alla teoria del gruppo fondamentale.

Un rivestimento di  $X$  è di fatto uno spazio  $\tilde{X}$  localmente omeomorfo a  $X$  tramite una proiezione di rivestimento  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ , e tale che  $\tilde{X}$  abbia un gruppo fondamentale "più piccolo" di quello di  $X$ .

- P. es. nel caso del rivestimento universale della circonferenza,  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ , la retta  $\mathbb{R}$  è semplicemente connessa, e  $S^1$  no.
- Lo studio approfondito del rivestimento universale  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  (precedente formula incorniciata) consente di dimostrare che

$$\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$$

ovvero il gruppo fondamentale di  $S^1$  è il gruppo utilizzato sul rivestimento (universale) semplicemente connesso  $\mathbb{R}$  per ottenere  $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  come suo quoziente e spazio rivestito.



# Riferimenti bibliografici

La teoria del gruppo fondamentale e dei rivestimenti costituisce un capitolo iniziale ma importante della topologia algebrica. Se il tempo a disposizione ce lo consentirà, torneremo a dire qualcosa su di essa verso fine maggio/inizio giugno.

Gli accenni contenuti in queste slides vogliono avere solo carattere informativo e culturale (dunque per ora senza alcuna pretesa per gli esami, per capirci!). Aggiungo qualche riferimento per chi volesse approfondire, raccomandando però a tutti voi di leggere con attenzione queste slides fino alla fine.

Di gruppo fondamentale e rivestimenti parlano:

E. Sernesi, Geometria II, Capitolo 4, paragrafi 14, 15, 16, 17, 18.

M. Manetti, Topologia, Capitoli 9, 10, 11, 12, 13, 14.

Nelle successive ultime slides vedremo ancora due esempi di rivestimento. Precisamente il quoziente (già trattato in precedenza)

$$S^n \xrightarrow{\pi_{\pm}} P^n(\mathbb{R})$$

e la "potenza n-esima" di  $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ , che fornisce come quoziente il toro  $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$  n-dimensionale:

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow T^n.$$

## Il gruppo $\mathbb{Z}_2$

Torniamo sul quoziente della sfera rispetto all'antipodalità

$$S^n / \sim_{\pm} = P^n(\mathbb{R}),$$

e osserviamo che il quoziente è rispetto al gruppo  $\mathbb{Z}_2 = \{\text{identità, antipodalità}\}$ , che agisce sulla sfera. Si tratta di un altro esempio di rivestimento: la proiezione  $S^n \xrightarrow{\pi_{\pm}} P^n(\mathbb{R})$  è un omeomorfismo locale, e ogni punto  $[x_0, x_1, \dots, x_n] \in P^n(\mathbb{R})$  ha un intorno ben rivestito (scegliamo una calotta) la cui controimmagine mediante  $\pi_{\pm}$  consiste di una coppia di calotte sulla sfera antipodali e omeomorfe.

È intuitivo (e si può dimostrare) che, per  $n \geq 2$  la sfera  $S^n$  è semplicemente connessa (per  $n = 1$  non lo è). Si può infatti per omotopia contrarre ad un punto ogni curva chiusa su di essa. Dunque, con la terminologia introdotta e se  $n \geq 2$ ,  $S^n$  è rivestimento universale di  $P^n(\mathbb{R})$ .

Riepilogando e recuperando anche  $n = 1$ , abbiamo i seguenti rivestimenti universali di  $P^n(\mathbb{R})$ :

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\mathbb{Z}} S^1 = P^1(\mathbb{R}), \quad \text{e per } n \geq 2 \quad S^n \xrightarrow{\mathbb{Z}_2} P^n(\mathbb{R}),$$

dove l'identificazione  $S^1 = P^1(\mathbb{R})$  (entrambe compatteificazioni di Alexandroff di  $\mathbb{R}$ ) costituisce l'esercizio 2(d) del Foglio 5.

$$\pi_1(P^2(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}_2$$

Ricordiamo che dal rivestimento universale  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  si ottiene l'isomorfismo  $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$  con il gruppo utilizzato su  $\mathbb{R}$  per ottenere  $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  come suo quoziente e spazio rivestito.

In modo del tutto simile, quando  $n \geq 2$ , dal rivestimento universale  $\pi_{\mathbb{Z}_2} : S^n \rightarrow P^n(\mathbb{R})$  si ottiene l'isomorfismo

$$\pi_1(P^n(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}_2 \quad (n \geq 2)$$

anche qui con il gruppo usato su  $S^n$  per ottenere  $P^n(\mathbb{R})$  come suo quoziente e spazio rivestito.

Tornando al nostro modello di  $P^2(\mathbb{R})$  come tazza per bere il caffè, può essere interessante cercare di individuare il generatore di  $\pi_1(P^2(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}_2$ . Un generatore deve essere una curva chiusa (o sua classe di omotopia) non contraibile a un punto ma che, se percorsa due volte, diventa contraibile a un punto: in  $\mathbb{Z}_2$  risulta  $1 + 1 = 0$ , e quanto sopra ne è la lettura topologica.

Ancora una volta il nostro atteso coffee break ci aiuta.

Nella tazza  $P^2(\mathbb{R})$ , il mezzo equatore che volevamo utilizzare per bere il caffè è indubbiamente una curva chiusa: gli estremi di questo mezzo equatore sono infatti identificati. Chiamiamo  $\gamma$  questo mezzo equatore; se lo percorriamo due volte, dunque  $\gamma + \gamma$ , stiamo percorrendo l'intero equatore e l'intero equatore sull'emisfero è contraibile (cfr. la precedente Figura 1, modello topologico di  $P^2(\mathbb{R})$ ). Pertanto, a meno di omotopia,  $\gamma + \gamma = 0$ , ovvero  $1 + 1 = 0$ , e questo esplicita la struttura di  $\pi_1(P^2(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}_2$ .

Naturalmente, guardando il mezzo equatore  $\gamma$  nel piano proiettivo  $P^2(\mathbb{R})$  inteso come ampliamento del piano affine  $\mathbb{R}^2$ , la curva  $\gamma$  altro non è che la retta all'infinito  $P^1(\mathbb{R})$ , che naturalmente in ambito proiettivo è una curva chiusa (cfr. ancora la Figura 1).

## E per finire i tori ...



Il prodotto di  $n$  copie del rivestimento  $\mathbb{R} \rightarrow S^1$  fornisce il rivestimento

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\mathbb{Z}^n} T^n = S^1 \times \dots \times S^1 \subset \mathbb{C} \times \dots \times \mathbb{C} = \mathbb{C}^n,$$

che può anche essere visto come proiezione sul quoziente di  $\mathbb{R}^n$  modulo l'equivalenza

$$\vec{x} \sim \vec{x}' \Leftrightarrow \vec{x} - \vec{x}' \in \mathbb{Z}^n.$$

Essendo  $\mathbb{R}^n$  semplicemente connesso, esso è rivestimento universale del toro  $T^n$ . Da tale rivestimento può dunque dedursi la struttura del gruppo fondamentale del toro  $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ :

$$\pi_1(T^n) \cong \mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$$

# Il toro $T^2 \subset \mathbb{R}^3$

Quando  $n = 2$  l'equivalenza in  $\mathbb{R}^2$

$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow x - x' \in \mathbb{Z}, y - y' \in \mathbb{Z}$$

porta all'identificazione dei quadrati di lato 1 di una scacchiera infinita del piano. Un insieme di rappresentanti è dunque costituito dai punti del quadrato  $\mathbb{I}^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ , dove per l'equivalenza sussistono ancora l'identificazione tra loro dei due lati orizzontali e l'identificazione tra loro dei due lati verticali, con conseguente identificazione a un solo punto dei quattro vertici del quadrato. L'identificazione dei due lati orizzontali porta alla realizzazione di un cilindro, e quindi con l'identificazione dei due lati verticali, si ottiene un toro, cfr. la seguente Figura 3.

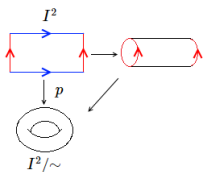


Figura 3 (da WikiCommons)

Si riconoscono i due generatori del gruppo fondamentale  $\pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  nel parallelo e nel meridiano del toro, evidenziati dalla Figura 3 con l'identificazione dei lati del quadrato  $\mathbb{I}^2$  risp. in blu e in rosso. Per le identificazioni, tali lati blu e rossi sono curve chiuse.