

Curvatura di superfici in \mathbb{R}^3

Teorema egregium

P. Piccinni

Corso di Geometria II (A-L), a.a. 2019-20
Laurea Triennale in Matematica
Sapienza Università di Roma Classroom - codice 24bsdao

Lezione del 4 giugno 2020, durata 2 ore
Lezione del 9 giugno 2020, durata 2 ore

1 Introduzione e equazioni di Gauss-Weingarten

- Introduzione
- Equazioni di Gauss-Weingarten
- Prime osservazioni sui coefficienti di GW
- Prime equazioni GW
- Simboli di Christoffel
- Loro carattere intrinseco e caso conforme

2 Il teorema egregium

- Identità tra le derivate terze
- Le tre combinazioni lineari
- Verso l'equazione di Gauss
- L'equazione di Gauss
- Teorema egregium
- Parametri conformi
- Esempi: elicoide e catenoide
- Esempio non immerso: il disco di Poincaré
- Curvatura gaussiana del disco di Poincaré

3 Equazioni di compatibilità e rigidità di superfici

- Equazioni di Codazzi-Mainardi
- Teorema di rigidità

4 Conclusione

- Oltre il teorema egregium

Un riferimento mobile

Ricordiamo che nello studio delle curve differenziabili regolari $\alpha(s)$ di \mathbb{R}^3 hanno fondamentale importanza le formule di Frenet

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{t}} = & kn \\ \dot{\mathbf{n}} = & -kt & \tau \mathbf{b} \\ \dot{\mathbf{b}} = & & -\tau \mathbf{n} \end{cases}$$

Esse esprimono le derivate rispetto all'ascissa curvilinea s del riferimento mobile

$$(\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$$

in equazioni differenziali lineari con coefficienti le funzioni $k(s)$ e $\tau(s)$ di curvatura e torsione.

Tale sistema ci ha consentito in particolare di dimostrare il teorema di rigidità per le curve di \mathbb{R}^3 , e di concludere che le funzioni di curvatura e torsione formano un sistema completo di invarianti per la loro geometria estrinseca.

Anche per le superfici differenziabili regolari $\alpha(u, v)$ di \mathbb{R}^3 abbiamo usato un **riferimento mobile**, e precisamente la terna

$$(\alpha_u(u, v), \alpha_v(u, v), \mathbf{N}(u, v))$$

che, benché non ortonormale, è adattata alla geometria della superficie.

Variazione del riferimento mobile

Appare dunque naturale - in parallelismo con quanto stabilito dalle formule di Frenet per le curve - domandarsi come varia quest'ultimo riferimento mobile al variare di u e di v , ovvero scrivere il sistema delle derivate parziali dei tre vettori $(\alpha_u(u, v), \alpha_v(u, v), \mathbf{N}(u, v))$.

Tale sistema è costituito dalle seguenti *equazioni di Gauss-Weingarten*:

$$\left(\begin{array}{l} \text{equazioni GW} \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{uu} = \Gamma_{11}^1 \alpha_u + \Gamma_{11}^2 \alpha_v + e \mathbf{N} \\ \alpha_{uv} = \Gamma_{12}^1 \alpha_u + \Gamma_{12}^2 \alpha_v + f \mathbf{N} \\ \alpha_{vu} = \Gamma_{21}^1 \alpha_u + \Gamma_{21}^2 \alpha_v + f \mathbf{N} \\ \alpha_{vv} = \Gamma_{22}^1 \alpha_u + \Gamma_{22}^2 \alpha_v + g \mathbf{N} \\ \mathbf{N}_u = a_{11} \alpha_u + a_{21} \alpha_v \\ \mathbf{N}_v = a_{12} \alpha_u + a_{22} \alpha_v \end{array} \right.$$

che, ripetiamo, esprimono le derivate dei vettori del riferimento mobile $(\alpha_u(u, v), \alpha_v(u, v), \mathbf{N}(u, v))$ in funzione del riferimento mobile stesso.

Dall'analogia con il sistema delle formule di Frenet delle curve, appare importante capire il più possibile dei suoi coefficienti, che sono tutte funzioni di u e di v .

e, f, g e la matrice di dg

Alcuni dei coefficienti delle equazioni GW ci sono ben noti. Precisamente:

- In primo luogo osserviamo che, poiché $\alpha_{uv} = \alpha_{vu}$, la terza equazione può essere omessa.
- Ricordiamo poi che i coefficienti della seconda forma fondamentale si ottengono come prodotti scalari $e = \langle \alpha_{uu}, \mathbf{N} \rangle$, $f = \langle \alpha_{uv}, \mathbf{N} \rangle$, $g = \langle \alpha_{vv}, \mathbf{N} \rangle$. Dunque, poiché \mathbf{N} è un versore, riconosciamo e, f, g come coefficienti della componente parallela a \mathbf{N} nelle prime equazioni.
- Le ultime due equazioni mancano della componente parallela a \mathbf{N} poiché \mathbf{N} è un versore. Le ultime due equazioni ci sono d'altra parte ben note e sono presenti negli ultimi due files. Riconosciamo infatti che $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ è la matrice dell'operatore di Weingarten dg .
- Rimane dunque da comprendere qualcosa sulle funzioni $\Gamma_{ij}^k(u, v)$, ($i, j, k = 1, 2$). Esse si chiamano *simboli di Christoffel* e avranno un ruolo cruciale nella dimostrazione del teorema egregium. Di essi diremo nelle slides successive. Per ora osserviamo solo che gli indici in basso ij (ognuno con valore 1 o 2) si riferiscono ai parametri di derivazione seconda: 11 appare in corrispondenza di α_{uu} ; 12 di α_{uv} ; 22 di α_{vv} . L'indice k in alto si riferisce invece alla posizione di $\Gamma_{ij}^k(u, v)$ a secondo membro: $k = 1$ se a coefficiente di α_u e $k = 2$ se a coefficiente di α_v .

I prodotti scalari

Concentriamoci dunque sulle funzioni $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k(u, v)$, ($i, j, k = 1, 2$), e pertanto sulla prime quattro equazioni GW (omettendo per quanto sopra la terza):

$$(prime\ equazioni\ GW) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{uu} = \Gamma_{11}^1 \alpha_u + \Gamma_{11}^2 \alpha_v + e \mathbf{N} \\ \alpha_{uv} = \Gamma_{12}^1 \alpha_u + \Gamma_{12}^2 \alpha_v + f \mathbf{N} \\ \alpha_{vv} = \Gamma_{22}^1 \alpha_u + \Gamma_{22}^2 \alpha_v + g \mathbf{N} \end{array} \right.$$

È utile considerare i sei prodotti scalari $\langle \alpha_{uu}, \alpha_u \rangle$, $\langle \alpha_{uu}, \alpha_v \rangle$, $\langle \alpha_{uv}, \alpha_u \rangle$, $\langle \alpha_{uv}, \alpha_v \rangle$, $\langle \alpha_{vv}, \alpha_u \rangle$, $\langle \alpha_{vv}, \alpha_v \rangle$. Si ha subito:

$$\begin{aligned} \langle \alpha_{uu}, \alpha_u \rangle &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \langle \alpha_u, \alpha_u \rangle = \frac{1}{2} E_u, & \langle \alpha_{uv}, \alpha_u \rangle &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \langle \alpha_u, \alpha_u \rangle = \frac{1}{2} E_v, \\ \langle \alpha_{uv}, \alpha_v \rangle &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u} \langle \alpha_v, \alpha_v \rangle = \frac{1}{2} G_u, & \langle \alpha_{vv}, \alpha_v \rangle &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \langle \alpha_v, \alpha_v \rangle = \frac{1}{2} G_v. \end{aligned}$$

Da ciò si ottiene facilmente anche:

$$\langle \alpha_{uu}, \alpha_v \rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v, \quad \langle \alpha_{vv}, \alpha_u \rangle = F_v - \frac{1}{2} G_u.$$

I tre sistemi lineari

Applichiamo ora tali sei prodotti scalari alle prime equazioni GW (due prodotti scalari per ognuna delle tre equazioni). Otteniamo i tre sistemi lineari:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{1}{2} E_u \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \frac{1}{2} E_v \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \frac{1}{2} E_v \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \frac{1}{2} G_u \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = F_u - \frac{1}{2} G_u \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \frac{1}{2} G_v \end{cases}$$

con incognite i simboli di Christoffel e tutti con determinante dei coefficienti $EG - F^2 > 0$.

Ecco le soluzioni:

(Christoffel)

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = \frac{\frac{1}{2} E_u G - F_u F + \frac{1}{2} E_v F}{EG - F^2}, & \Gamma_{11}^2 = \frac{F_u E - \frac{1}{2} E_v E - \frac{1}{2} E_u F}{EG - F^2}, & \Gamma_{12}^1 = \frac{\frac{1}{2} E_v G - \frac{1}{2} G_u F}{EG - F^2}, \\ \Gamma_{12}^2 = \frac{\frac{1}{2} G_u E - \frac{1}{2} E_v F}{EG - F^2}, & \Gamma_{22}^1 = \frac{F_v G - \frac{1}{2} G_u G - \frac{1}{2} G_v F}{EG - F^2}, & \Gamma_{22}^2 = \frac{\frac{1}{2} G_v E - F_v F + \frac{1}{2} G_u F}{EG - F^2}. \end{cases}$$

Un lemma

Dunque:

Lemma. I sei simboli di Christoffel $\Gamma_{ij}^k(u, v)$ dipendono solo dalle funzioni $E(u, v)$, $F(u, v)$, $G(u, v)$, coefficienti della prima forma fondamentale, e dalle loro derivate prime.

- Si noti che nelle equazioni (GW) tutti gli altri coefficienti (e, f, g , e gli elementi della matrice $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$) dipendono solo o anche dalla seconda forma fondamentale.
- Nella geometria differenziale delle superfici di \mathbb{R}^3 (e delle sottovarietà di \mathbb{R}^n o di altri ambienti) si usa chiamare *intrinseca* ogni funzione che dipenda solo dalla prima forma fondamentale. Per quanto detto nel precedente file, una funzione intrinseca risulta invariante per isometrie locali. Si dice invece *estrinseca* ogni funzione che dipenda anche (o solo) dalla seconda forma fondamentale.
- Ci saranno utili in seguito le seguenti più semplici espressioni dei simboli di Christoffel quando $E \equiv G$, $F \equiv 0$, ovvero quando i parametri (u, v) sono conformi. Questa scelta, lo ricordiamo, è sempre localmente possibile (e globalmente, se la superficie è orientabile, esiste un atlante formato da parametrizzazioni conformi).

(Christoffel conformi)

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \frac{E_u}{2E}, \quad -\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = \frac{E_v}{2E}$$

Ancora su GW

Tornando alle equazioni di Gauss-Weingarten, possiamo naturalmente procedere a ulteriori derivazioni. Osserviamo però, che dato che stiamo supponendo che α sia \mathcal{C}^∞ , abbiamo varie identità tra le derivate successive miste. P. es. risulta:

$$\begin{cases} (\alpha_{uu})_v = (\alpha_{uv})_u \\ (\alpha_{vv})_u = (\alpha_{uv})_v \\ (\mathbf{N}_u)_v = (\mathbf{N}_v)_u \end{cases}$$

Ognuna di queste identità può essere esplicitata, sostituendo ai termini in parentesi tonda la loro espressione data dalle equazioni di Gauss-Wengarten, e poi procedendo con l'ulteriore derivazione.

Tra non molto procederemo esplicitamente (e molto parzialmente!) a fare ciò.

Con tali calcoli si arriva, per ognuno dei tre casi a un identità tra combinazioni lineari di α_u , α_v e \mathbf{N} .

$$A_1 = B_1 = \dots = C_3 = 0$$

Dunque otteniamo identità del tipo:

$$\begin{cases} A_1\alpha_u + B_1\alpha_v + C_1\mathbf{N} = 0 \\ A_2\alpha_u + B_2\alpha_v + C_2\mathbf{N} = 0 \\ A_3\alpha_u + B_3\alpha_v + C_3\mathbf{N} = 0 \end{cases}$$

dove i nove coefficienti A_1, \dots, C_3 dipendono dai coefficienti delle equazioni di Gauss-Weingarten, dunque dai simboli di Christoffel Γ_{ij}^k , da e, f, g , e dagli elementi della matrice $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$.

- Poichè i vettori $\alpha_u, \alpha_v, \mathbf{N}$ sono linearmente indipendenti, le precedenti identità implicano che i coefficienti A_1, B_1, \dots, C_3 sono tutti nulli.
- Le relazioni $A_1 = 0, B_1 = 0, A_2 = 0, B_2 = 0$ forniscono quattro versioni equivalenti dell'*equazione di Gauss*.
- Le relazioni $C_1 = 0, A_3 = 0$ e $C_2 = 0, B_3 = 0$ forniscono versioni a coppie equivalenti rispettivamente della *prima* e della *seconda equazione di Codazzi-Mainardi*.
- Le tre equazioni qui menzionate sono note anche come *equazioni di compatibilità*, e di queste tre nel complesso parleremo più avanti, a proposito del *teorema di rigidità per superfici*.
- Infine $C_3 = 0$ è un'identità.

Deduzione

Occupiamoci ora dell'equazione di Gauss, che dedurremo con $B_1 = 0$.

Dobbiamo dunque applicare l'identità $(\alpha_{uu})_v = (\alpha_{uv})_u$ alle espressioni che otteniamo derivando rispetto a v la prima equazione di Gauss-Weingarten, e rispetto a u la seconda equazione GW. Dell'identità ottenuta, ai fini della relazione $B_1 = 0$, ci interesseranno solo le componenti parallele a α_v .

Calcoliamo:

$$(1) \quad (\alpha_{uu})_v = (\Gamma_{11}^1)_v \alpha_u + \Gamma_{11}^1 \alpha_{uv} + (\Gamma_{11}^2)_v \alpha_v + \Gamma_{11}^2 \alpha_{vv} + e_v \mathbf{N} + e \mathbf{N}_v$$

$$(2) \quad (\alpha_{uv})_u = (\Gamma_{12}^1)_u \alpha_u + \Gamma_{12}^1 \alpha_{uu} + (\Gamma_{12}^2)_u \alpha_v + \Gamma_{12}^2 \alpha_{uv} + f_u \mathbf{N} + f \mathbf{N}_u$$

In queste espressioni (1) e (2) si può sostituire, al posto di α_{uu} , α_{uv} , α_{vv} quanto risulta dalle prime tre equazioni di Gauss-Weingarten. Fatto ciò, uguagliamo le espressioni così ottenute da (1) e (2). Questo genererà l'identità $A_1 \alpha_u + B_1 \alpha_v + C_1 \mathbf{N} = 0$. In particolare, per determinare il coefficiente B_1 , uguagliamo i coefficienti di α_v nelle espressioni che abbiamo ottenuto da (1) e (2):

$$\Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 + e a_{22} = \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 + f a_{21}.$$

Conclusione

Dobbiamo ora ricordare (file " Curvatura Superfici differenziabili in \mathbb{R}^3 - Definizioni e formule di calcolo") che

$$a_{21} = \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \quad a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2}.$$

Sostituendo nella precedente identità otteniamo

$$(\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 = f \frac{eF - fE}{EG - F^2} - e \frac{fF - gE}{EG - F^2} = E \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = EK$$

È questa l'equazione di Gauss che riscriviamo così:

$$\mathbf{K} = \mathbf{E}^{-1} \left[(\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 \right]$$

e ricordiamo che

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = \frac{\frac{1}{2} E_u G - F_u F + \frac{1}{2} E_v F}{EG - F^2}, & \Gamma_{11}^2 = \frac{F_u E - \frac{1}{2} E_v E - \frac{1}{2} E_u F}{EG - F^2}, & \Gamma_{12}^1 = \frac{\frac{1}{2} E_v G - \frac{1}{2} G_u F}{EG - F^2}, \\ \Gamma_{12}^2 = \frac{\frac{1}{2} G_u E - \frac{1}{2} E_v F}{EG - F^2}, & \Gamma_{22}^1 = \frac{F_v G - \frac{1}{2} G_u G - \frac{1}{2} G_v F}{EG - F^2}, & \Gamma_{22}^2 = \frac{\frac{1}{2} G_v E - F_v F + \frac{1}{2} G_u F}{EG - F^2}. \end{cases}$$

K è intrinseca

Ne segue immediatamente il

Teorema egregium. La curvatura gaussiana K dipende solo da E, F, G e dalle loro derivate prime e seconde. K è dunque un invariante intrinseco, e invariante per isometrie locali tra superfici.

Data l'importanza, rileggiamolo nella formulazione originale (C. F. Gauss, Disquisitiones generales circa superficies curvas, 1827).

Formula itaque art. praec. sponte perducit ad egregium

THEOREMA. *Si superficies curva in quamcunque aliam superficiem explicatur, mensura curvaturae in singulis punctis invariata manet.*

Una delle prospettive aperte dal teorema egregium è la possibilità di formulare una teoria della curvatura per varietà non immerse, in cui dunque non è possibile introdurre un'applicazione di Gauss e una seconda forma fondamentale. Si pensi agli spazi proiettivi, e più in generale alle varietà topologiche M di dimensione n considerate in topologia, con l'aggiunta di un atlante differenziabile e quindi uno spazio tangente T_pM per ogni $p \in M$. Il dato di un campo g di prodotti scalari $g_p : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ generalizza la prima forma fondamentale delle superfici. Il campo g si chiama *metrica riemanniana* e l'equazione di Gauss può essere vista come prototipo per una definizione di curvatura della *varietà riemanniana* (M, g) . Vedremo tra qualche slide un semplicissimo esempio: il calcolo della curvatura del disco di Poincaré, modello della geometria iperbolica.

Forma semplificata dell'equazione di Gauss

Ricordiamo che, scegliendo sulla superficie parametri conformi (u, v) , i simboli di Christoffel si semplificano notevolmente:

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \frac{E_u}{2E}, \quad -\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = \frac{E_v}{2E}$$

Sostituendo tali Γ_{ij}^k nell'equazione di Gauss, e con un semplice calcolo (che lascio per esercizio), si ottiene la seguente elegante formula.

Teorema. Siano (u, v) parametri conformi sulla superficie $\alpha(u, v)$, e dunque $E \equiv G, F \equiv 0$. Allora

$$K = -\frac{1}{2E} \Delta \log E$$

dove $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}$ è l'operatore di Laplace.

K con l'equazione di Gauss

Nei precedenti due files "Curvatura di superfici in \mathbb{R}^3 - Definizioni e formule di calcolo" e "Curvatura di superfici in \mathbb{R}^3 - Altri argomenti" abbiamo scritto le equazioni parametriche dell'elicoide e del catenoide:

$$\text{Elicoide } \beta(u, v) = (\sin u \sinh v, \cos u \sinh v, u)$$

$$\text{Catenoido } \gamma(u, v) = (\cos u \cosh v, -\sin u \cosh v, v)$$

e visto per entrambe le superfici (peraltro localmente isometriche) che i coefficienti della prima forma fondamentale sono:

$$E = \cosh^2 v = G, \quad F \equiv 0,$$

e dunque i parametri (u, v) sono conformi. Nel primo dei files citati abbiamo calcolato anche i coefficienti delle seconde forme fondamentali (diversi nei due casi) e dedotto che per entrambe le superfici la curvatura gaussiana è data dalla funzione

$$K = -\frac{1}{\cosh^4 v}.$$

Naturalmente tale valore di K è riottenibile dall'equazione di Gauss, nella versione semplificata scritta nella precedente slide:

$$K = -\frac{1}{2E} \Delta \log E = -\frac{1}{2 \cosh^2 v} \Delta \log \cosh^2 v = -\frac{1}{2 \cosh^2 v} \frac{\partial}{\partial v} (2 \tanh v) = -\frac{1}{\cosh^4 v}.$$

Metrica iperbolica

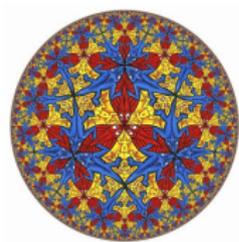


Figura 1 (da Mathem@ticamente - Creative Commons)

In quest'opera, Limite del Cerchio di M. C. Escher, appaiono animali che, più grandi al centro, appaiono progressivamente più piccoli via che che ci si avvicina al bordo del disco

$$D^2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, u^2 + v^2 < 1\}.$$

Questa opera di Escher è ispirata alla seguente *metrica di Poincaré* del disco

$$ds^2 = \frac{4}{(1 - u^2 - v^2)^2} (du^2 + dv^2).$$

Rispetto a tale metrica infatti, gli animali raffigurati hanno tutti la stessa grandezza, e vale la pena di segnalare che le colonne vertebrali dei rettili raffigurati descrivono alcune *geodetiche*, o curve di minima lunghezza, del disco.

Naturalmente si ignora qui che il disco sia in \mathbb{R}^2 o in \mathbb{R}^3 , semplicemente gli si assegna una prima forma fondamentale (o metrica riemanniana) *ad hoc*. L'equazione di Gauss consente di definire e calcolare la curvatura gaussiana del disco di Poincaré.

Calcolo

La metrica

$$ds^2 = \frac{4}{(1 - u^2 - v^2)^2} (du^2 + dv^2).$$

è conforme alla metrica euclidea, risultando $E = G = \frac{4}{(1 - u^2 - v^2)^2}$, $F = 0$, e i parametri sono conformi. Usiamo dunque l'equazione di Gauss per parametri conformi (u, v) . Si ottiene:

$$K = -\frac{1}{2E} \Delta \log \frac{4}{(1 - u^2 - v^2)^2} = -\frac{(1 - u^2 - v^2)^2}{8} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) \log \frac{4}{(1 - u^2 - v^2)^2} \right],$$

e derivando

$$K = -\frac{(1 - u^2 - v^2)^2}{8} \left(\frac{4(1 - u^2 - v^2) - 4u(-2u)}{(1 - u^2 - v^2)^2} + \frac{4(1 - u^2 - v^2) - 4v(-2v)}{(1 - u^2 - v^2)^2} \right) \equiv -1$$

Osservazione. Le tre superfici S^2 (sfera di raggio 1), \mathbb{R}^2 , D^2 (disco con la precedente metrica di Poincaré) hanno curvatura gaussiana costante rispettivamente $+1, 0, -1$, e sono modelli universali delle superfici con queste proprietà. L'attributo universale è relativo al fatto che essi costituiscono il rivestimento universale, ovvero semplicemente connesso, delle superfici con tale proprietà. Si dice anche che essi sono modelli universali per la geometria rispettivamente non euclidea ellittica, euclidea, e non euclidea iperbolica.

Le tre equazioni di compatibilità

Torniamo alla geometria estrinseca delle superfici di \mathbb{R}^3 .

Oltre all'*equazione di Gauss* (che qui riscriviamo con $K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2}$)

$$\frac{eg-f^2}{EG-F^2} = E^{-1} \left[(\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 \right]$$

si ottengono con analogo procedimento (identità $C_1 = 0$ e $C_2 = 0$ tra le nove elencate nelle precedenti slides), le seguenti *prima equazione di Codazzi-Mainardi*

$$e_v - f_u = e \Gamma_{12}^1 + f (\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^1) - g \Gamma_{11}^2$$

e *seconda equazione di Codazzi-Mainardi*:

$$f_v - g_u = e \Gamma_{22}^1 + f (\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g \Gamma_{12}^2$$

È evidente da come sono state dedotte che esse costituiscono delle condizioni necessarie perché sei funzioni assegnate $E(u, v)$, $F(u, v)$, $G(u, v)$, $e(u, v)$, $f(u, v)$, $g(u, v)$ possano costituire i coefficienti della prima e della seconda forma fondamentale di una superficie $\alpha(u, v)$ di \mathbb{R}^3 .

Per tale ragione esse si chiamano *equazioni di compatibilità* per le superfici di \mathbb{R}^3 .

Enunciato

Similmente a quanto visto per le curve, enunciamo (e non dimostriamo) il

Teorema di rigidità per le superfici di \mathbb{R}^3 . Siano E, F, G, e, f, g funzioni \mathcal{C}^∞ definite su un aperto $V \subset \mathbb{R}^2$ tali che $E > 0$, $G > 0$, $EG - F^2 > 0$ e che le sei funzioni soddisfino su V l'equazione di Gauss e le due equazioni di Codazzi-Mainardi. Allora per ogni $q \in V$ esiste un intorno $U \subset V$ e un diffeomorfismo $\alpha : U \rightarrow \alpha(U) \subset \mathbb{R}^3$ tale che la superficie regolare α abbia E, F, G, e, f, g come coefficienti della prima e seconda forma fondamentale. Inoltre ogni altro diffeomorfismo β con le stesse proprietà è tale che le superfici α e β sono ottenibili una dall'altra mediante un movimento rigido di \mathbb{R}^3 .

La dimostrazione si basa su teoremi di esistenza e unicità di soluzioni di sistemi di equazioni alle derivate parziali. In analogia con quanto detto sulle funzioni di curvatura e di torsione per le curve, concludiamo che prima e seconda forma fondamentale delle superfici costituiscono un sistema completo di invarianti per la loro geometria locale estrinseca in \mathbb{R}^3 .

La geometria riemanniana

Abbiamo detto qualcosa sull'importanza del teorema egregium e ne abbiamo visto la dimostrazione, che si basa sulla deduzione dell'equazione di Gauss. Tale deduzione è una sequenza di derivazioni, applicate ad identità tra le derivate terze della parametrizzazione. La dimostrazione dice in realtà ben poco sul perché tale sequenza di derivazioni e identità conduca al carattere intrinseco della curvatura gaussiana. Nella dimostrazione si nota il ruolo di intermediari giocato dai simboli di Christoffel, ruolo che certamente merita approfondimenti.

Di fatto approfondimenti di tutto ciò appartengono alla storia della matematica, a partire dai fondamentali contributi di Riemann nella sua Abilitazione (1854) e nella successiva Commentatio (1861). Il contesto è quello di una varietà M^n di dimensione $n \geq 2$, non importa se immersa o no in un ambiente euclideo. Ciò che conta è la sua struttura differenziabile, che include l'aver attorno a ogni punto p delle *coordinate o parametri locali* (x_1, x_2, \dots, x_n) (che hanno il ruolo dei parametri (u, v) delle superfici), e in ogni punto p uno spazio tangente $T_p M$. Si assegni poi un campo $g = \{g_p\}$ di prodotti scalari $g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$. Tale campo g è detto *metrica riemanniana* su M^n . Sia (g_{ij}) la matrice associata alla metrica riemanniana g nelle basi degli spazi tangenti individuate dalla coordinate locali, dunque l'analogo della matrice $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ della prima forma fondamentale. In questo contesto si definiscono allora gli n^3 simboli di Christoffel

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_m g^{km} \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_m} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial u_i} \right),$$

dove (g^{km}) è l'inversa della matrice (g_{km}) .

Di conseguenza, e sulla falsariga dell'equazione di Gauss, Riemann definisce le n^4 componenti del tensore di curvatura che porterà il suo nome

$$R_{ijkl} = \sum_{m,s} g_{im} \left(\frac{\partial \Gamma_{jl}^m}{\partial u_k} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^m}{\partial u_l} + \Gamma_{jl}^s \Gamma_{ks}^m - \Gamma_{jk}^s \Gamma_{ls}^m \right).$$

Se $n = 2$ tutto ciò si riduce a quanto abbiamo visto e, tra le $16 = 2^4$ componenti del tensore di Riemann, 12 risultano identicamente nulle e 4 si riducono a K o a $-K$, l'unico invariante intrinseco essendo in dimensione 2 la curvatura gaussiana.

L'inizio del XX secolo

Terminiamo menzionando due importanti sviluppi dell'inizio del XX secolo. Il primo, che dà grande risalto alla teoria intrinseca della curvatura, è la teoria della relatività generale (1915). Le metriche usate da A. Einstein nella varietà M^4 chiamata spazio-tempo sono di fatto metriche lorentziane, ovvero campi di prodotti scalari non degeneri e con indici $(p, q) = (3, 1)$ di positività e negatività. La teoria riemanniana della curvatura continua a valere nel contesto lorentziano e le equazioni del campo di Einstein stabiliscono l'interazione tra la curvatura dello spazio-tempo e la presenza di massa e di energia, fornendo una teoria gravitazionale che ebbe presto evidenze sperimentali.

In parallelo (1917) viene introdotta da T. Levi Civita, peraltro corrispondente matematico di Einstein durante la genesi della relatività generale, la nozione geometrica di *parallelismo* su una varietà riemanniana. Essa consente di definire una derivazione di un campo di vettori definito lungo una curva sulla varietà, e nella direzione di un altro campo di vettori, e conseguentemente di vedere i simboli di Christoffel come coefficienti di tale operazione tra campi di vettori. È questa la premessa di una nozione fondamentale, presto chiamata *connessione di Levi Civita*, intermedia tra la metrica riemanniana e la sua curvatura, e oggi premessa e approccio alla teoria riemanniana della curvatura, e a varie sue generalizzazioni e applicazioni.

Gli approfondimenti qui indicati trovano in genere spazio nei corsi di "Geometria Differenziale" della Laurea Triennale e "Geometria Riemanniana" della laurea Magistrale.