Appello straordinario di Geometria II, a.a. 2016-17 - Prof. P. Piccinni - 18 novembre 2016

a. Scrivere subito Matricola (obbligatoria), Cognome e Nome.
b. Utilizzare questi fogli per le risposte. I fogli protocollo sono invece per riflessioni o calcoli, e non vanno consegnati.
c. Durante la prova non è consentito uscire dall'aula.

Tempo a disposizione: 2 ore esatte

Matricola............................**Cognome**..**Nome**...

1. Si conderino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$, con la topologia euclidea indotta:

$$C' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 < 4\}, \qquad C'' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{1}{4} < x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\bowtie$ 1	C' e C'' sono omeomorfi
$\bowtie$ 2	C' e C'' sono omotopicamente equivalenti
3	C' e C'' sono semplicemente connessi
$\bowtie$ 4	C' e C'' hanno gruppi fondamentali isomorfi
5	Nessuna delle precedenti

2. Si considerino i sottospazi

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, |x| \leq 1, |y| \leq 1\} \text{ (quadrato chiuso)}, \qquad Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \, x^2 + y^2 \leq 1\} \text{ (disco chiuso)},$$

entrambi con la topologia euclidea indotta. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\bowtie$ 1	X e Y sono omeomorfi
2	$\complement_X Y$ è compatto
$\bowtie$ 3	$\complement_X Y$ ha quattro componenti connesse e ognuna di esse è un aperto di X
4	$\complement_X Y$ ha quattro componenti connesse e ognuna di esse è un chiuso di X
5	Nessuna delle precedenti

3. Si consideri lo spazio metrico $X = \mathcal{C}([-1,1], \mathbb{R})$, costituito dalle funzioni continue $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, con la distanza

$$d(f,g) = \max_{x \in [-1,1]} \{|f(x) - g(x)|\},$$

e il suo sottospazio

$$S = \{f(x) = x^k, \text{ per qualche } k \in \mathbb{N}\}.$$

Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\bowtie$ 1	S è limitato
2	S è aperto in X
3	S è compatto
4	S è connesso
5	Nessuna delle precedenti

4. Sia $\varphi : X \to Y$ un'applicazione continua tra spazi topologici connessi per archi. Si assuma che l'indotta

$$\varphi_* : \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Y, \varphi(x))$$

sia iniettiva. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

1	φ è iniettiva
2	φ è un rivestimento
3	φ non può essere un omeomorfismo
4	φ non può essere suriettiva
$\bowtie$ 5	Nessuna delle precedenti

5. Sia $p : \tilde{X} \to X$ un rivestimento con $\tilde{X}, X$ spazi topologici connessi per archi. Si assuma che per qualche $\tilde{x} \in \tilde{X}$ l'indotta

$$p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \longrightarrow \pi_1(X, p(\tilde{x}))$$

sia un isomorfismo. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

$\bowtie$ 1	p è suriettiva
$\bowtie$ 2	p è un omeomorfismo
$\bowtie$ 3	p è un rivestimento regolare
4	$\pi_1(X, p(\tilde{x}))$ è abeliano
5	Nessuna delle precedenti

6. Sia S una superficie topologica connessa e compatta, dunque omeomorfa a una e una sola delle seguenti:

i) la sfera S^2

ii) per qualche g la superficie orientabile S_g, somma connessa di g tori T^2

iii) per qualche r la superficie non orientabile $S_{[r]}$, somma connessa di r piani proiettivi $\mathbb{R}P^2$.

Sia $\chi(S)$ la sua caratteristica di Eulero. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

1	Se $\pi_1(S)$ non è abeliano, allora S è omeomorfa a una S_g, $g \geq 2$
2	Se $\chi(S) = 0$, allora S è orientabile
3	S ha per retratto di deformazione un bouquet di circonferenze
$\bowtie$ 4	Nessuna delle precedenti

7. Si consideri sul piano proiettivo $\mathbb{R}P^2$ (topologia indotta dalla topologia euclidea) la successione di punti

$$p_n = [\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}],$$

dove $[x_0, x_1, x_2]$ sono le coordinate proiettive omogenee. Stabilire quali tra le seguenti affermazioni sono vere (anche più risposte):

1	La successione $\{p_n\}$ non converge
$\bowtie$ 2	La successione $\{p_n\}$ converge al punto $[1, 1, 0]$
3	La successione $\{p_n\}$ converge al punto $[1, 1, 1]$
4	La successione $\{p_n\}$ converge al punto $[0, 0, 1]$
5	Nessuna delle precedenti