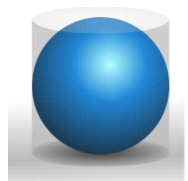
Corso di Geometria II, a. a. 2015-16

Foglio n. 8

1. Sia X la sfera S^2 privata dei poli nord e sud, e sia Y il cilindro (aperto e senza basi) ad essa circoscritto nell'equatore e di altezza pari al diametro della sfera. In formule:

$$X : \begin{cases} x(\alpha,\beta) = r\sin\alpha\cos\beta \\ y(\alpha,\beta) = r\sin\alpha\sin\beta \\ z(\alpha,\beta) = r\cos\alpha \end{cases} \quad (0<\alpha<\pi,\ 0\le\beta\le 2\pi); \qquad Y : \begin{cases} x(u,v) = r\cos v \\ y(u,v) = r\sin v \\ z(u,v) = ru \end{cases} \quad (-1<u<1,\ 0\le v\le 2\pi)$$



Dato $P = (x_0, y_0, z_0) \in X$ si denoti con $Q = (0,0,z_0)$ il punto dell'asse z alle stessa quota di P. Si considerino le applicazioni

$$\varphi, \psi : X \to Y \qquad \text{definite da} \qquad \varphi(P) = Y \cap t\vec{QP}, \quad \psi(P) = Y \cap t\vec{PQ},$$

dove con $t\vec{QP}$ e $t\vec{PQ}$ sono denotate le semirette $(t \ge 0)$ rispettivamente uscente da Q e passante per P e viceversa. La φ è chiamata *applicazione di Archimede*, e ψ è la sua composizione con la rotazione delle sfera attorno all'asse z di angolo π.

i) Dare una descrizione di φ e ψ in termini dei parametri (α,β) su X e (u,v) su Y, determinando nei due casi le corrispondenti funzioni $u = u(\alpha,\beta)$, $v = v(\alpha,\beta)$.

ii) Verificare che φ e ψ sono applicazioni omotope.

iii) Descrivere i gruppi fondamentali di X e di Y, e di conseguenza constatare che le indotte delle due applicazioni coincidono: $\varphi_* = \psi_*$

2. Si consideri il toro

$$T^2 = S^1 \times S^1 = \{(e^{2\pi it}, e^{2\pi is});\, t,s \in [0,1]\},$$

dove si ricordi che $e^{2\pi it} = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \in S^1 \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$.

i) Verificare che l'applicazione $p : (t,s) \to (4t, 6s)$ definisce un rivestimento

$$p : T^2 \to T^2.$$

ii) Determinare la cardinalità delle fibre $p^{-1}(y_0)$.

iii) Descrivere l'applicazione p_* indotta tra i gruppi fondamentali, precisando l'indice del sottogruppo

$$p_*[\pi_1(T^2, x_0)] \subset \pi_1(T^2, p(x_0)).$$

iv) Si consideri la spirale $\mathcal{S}$, sul toro che riveste, definita dalla relazione $s = 2t$. Quante volte la proiezione $p(\mathcal{S})$ interseca un parallelo del toro rivestito? E un meridiano?

3. Si consideri lo spazio $X = S^2 \cup I$, dove S^2 è la 2-sfera e I un suo diametro. Calcolare $\pi_1(X)$ usando il teorema di van Kampen.

4. Determinare il gruppo fondamentale del seguente sottospazio di $\mathbb{R}^2$:

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \text{con} \ -1 \le x, y \le 1 \ \text{e} \ x \in \mathbb{Z} \ \text{o} \ y \in \mathbb{Z}\}.$$

5. Determinare il gruppi fondamentali dei seguenti spazi:

i) $\mathbb{R}P^2 - \{P\}$, il piano proiettivo reale privato di un punto.

ii) $\mathbb{C}P^2 - \{P\}$, il piano proiettivo complesso privato di un punto.