Geometria 1. II^0 Modulo. a.a. 01/02. Gruppo A-L (Prof. P. Piazza)
Esercizi per casa del 12/10/01

Denotiamo come al solito con P_U la proiezione ortogonale su un sottospazio U di $\mathbb{R}^n$.

Esercizio 1. Sia W un sottospazio; verificare che sussiste la seguente identità in $\mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$: $I = P_W + P_{W^\perp}$, con I uguale all'operatore identità.

Questa osservazione (di facile dimostrazione) è piuttosto utile. Ad esempio: sia W è un iperpiano e supponiamo che venga chiesta la matrice associata a P_W nella base canonica. Per l'esercizio basterà determinare $P_{W^\perp}$ (perché poi $P_W = I - P_{W^\perp}$); ma $W^\perp$ è una retta e la proiezione ortogonale su una retta è molto facile a scriversi.

Osservazione. Abbiamo visto a lezione che l' operatore di proiezione ortogonale su un sottospazio verifica 2 proprietà:
(i) è idempotente ($P_W^2 = P_W$)
(ii) è autoaggiunto ($< P_W \underline{v}, \underline{u} >=< \underline{v}, P_W \underline{u} > \ \forall \underline{v}, \forall \underline{u}$).
Abbiamo verificato queste 2 proprietà utilizzando la matrice associata a P_W nella base canonica (questa matrice, sia essa B, è idempotente ($B^2 = B$) e simmetrica ($B^T = B$)).
Siamo ora interessati al *viceversa* di questa osservazione: supponiamo di avere un operatore che sia idempotente ed autoaggiunto; è vero che T è una proiezione ortogonale ? La risposta è affermativa come ora dimostrer*ete*.

Esercizio 2. Sia $T \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ un operatore idempotente (quindi $T^2 = T$). Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalore di T; verificare che $\lambda = 0$ oppure $\lambda = 1$.

Esercizio 3. Verificare che se T è idempotente allora $\mathbb{R}^n = V_T(1) \oplus V_T(0)$.
Suggerimento. Possiamo scrivere, per ogni $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{v} = T\underline{v} + (I - T)\underline{v}$...

Esercizio 4. Verificare che se T è idempotente *e* autoaggiunto, allora T è una proiezione ortogonale (e più precisamente la proiezione ortogonale su $V_T(1)$).[1]

Esercizio 5. Risolvere nuovamente l'esercizio 5 del 9/10/01.

Esercizio 6 Verificare che la simmetria ortogonale S_W rispetto ad un sottospazio W gode delle seguenti 2 proprietà:
(i) $S_W^2 = I$
(ii) S_W è un operatore autoaggiunto.
Suggerimento. Basta utilizzare la definizione e le proprietà della proiezione ortogonale.

Osservazione. Siamo interessati al *viceversa* dell'esercizio 6.
Abbiamo visto a lezione che se $T \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ è un operatore lineare e se

$$\mathbb{R}^n = V_T(1) \oplus^\perp V_T(-1)$$

allora T è la simmetria ortogonale rispetto al sottospazio $V_T(1)$.
Sia ora $T \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ un operatore tale che $T^2 = I$. Verifichiamo che se $\lambda \in \mathbb{R}$ è

[1] In particolare, l'operatore definito da una matrice B tale che $B^2 = B$ e $B^T = B$ è una proiezione ortogonale (e più precisamente la proiezione ortogonale su $V_B(1)$).

un autovalore di T allora $\lambda = \pm 1$: se $T\underline{v} = \lambda \underline{v}$ allora da una parte $\underline{v} = T^2\underline{v}$ (per ipotesi) e d'altra parte $T^2\underline{v} = \lambda T\underline{v} = \lambda^2\underline{v}$, da cui segue che $\underline{v} = \lambda^2\underline{v}$ che implica $\lambda^2 - 1 = 0$ da cui l'asserto.
Notiamo poi che se $T^2 = I$ allora $\mathbb{R}^n = V_T(1) \oplus V_T(-1)$. Infatti possiamo scrivere per ogni $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$:

$$\underline{v} = \frac{\underline{v} + T\underline{v}}{2} + \frac{\underline{v} - T\underline{v}}{2}$$

ed utilizzando l'ipotesi $T^2 = I$ ci accorgiamo che il primo addendo a destra appartiene a $V_T(1)$ ed il secondo addendo a $V_T(-1)$ (fate questa verifica; è banale). Quindi $\mathbb{R}^n = V_T(1) + V_T(-1)$ da cui segue che $\mathbb{R}^n = V_T(1) \oplus V_T(-1)$ (perché $\lambda \neq \mu \Rightarrow V_T(\lambda) \cap V_T(\mu) = \underline{0}$).
Conclusione: se $T^2 = I$ allora $\mathbb{R}^n = V_T(1) \oplus V_T(-1)$.
Supponiamo, infine, che T sia *anche* autoaggiunto. Sotto questa ulteriore ipotesi otteniamo che la decomposizione di cui sopra è di fatto una decomposizione ortogonale: $\mathbb{R}^n = V_T(1) \oplus^{\perp} V_T(-1)$. [2] Per quanto già visto a lezione (e richiamato qui sopra), concludiamo che vale la seguente
Proposizione Se T è autoaggiunto e se $T^2 = I$ allora T è la simmetria ortogonale rispetto a $V_T(1)$.[3]

---

[2]Infatti: sia $\underline{v} \in V_T(1)$ e sia $\underline{w} \in V_T(-1)$; si ha allora

$$< \underline{v}, \underline{w} >= - < \underline{v}, T\underline{w} >= - < T\underline{v}, \underline{w} >= - < \underline{v}, \underline{w} >$$

da cui segue che $< \underline{v}, \underline{w} >= 0$ che era quello che dovevamo verificare. La prima uguaglianza segue dal fatto che $\underline{w} \in V_T(-1)$, la seconda dal fatto che T è autoaggiunto, la terza dal fatto che $\underline{v} \in V_T(1)$

[3]In particolare l'operatore definito da una matrice B tale che $B^2 = I$ e $B = B^T$ è la simmetria ortogonale rispetto a $V_B(1)$. È quest'ultima osservazione che è particolarmente utile negli esercizi.