Geometria 1. II^0 Modulo. a.a. 01/02. Gruppo A-L (Prof. P. Piazza)
Esercizi per casa del 19/10/01

Esercizio 0. Sia A la matrice reale

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Studiare la diagonalizzabilità di A. Determinare una matrice invertibile reale C tale che $C^{-1}AC$ sia triangolare superiore.

Sia V uno spazio vettoriale reale (o più in generale su un campo $\mathbb{K}$) e sia $F \in \mathrm{End}(V)$; sia W un sottospazio di V. Diremo che W è *un sottospazio invariante* per F (o *rispetto a* F) se $F(W) \subseteq W$. Se W è un sottospazio invariante, possiamo definire *la restrizione* di F a W: $F|_W \in \mathrm{End}(W)$. Questa è l'applicazione lineare $W \to W$ che associa a $\underline{w} \in W$ il vettore $F(\underline{w})$ (essendo W invariante ne segue che $F(\underline{w}) \in W$). [1]

Esercizio 1 (molto facile). Verificare che se $\underline{v}$ è un autovettore di F allora $\mathbb{R}\underline{v}$ è una retta invariante. Verificare che, viceversa, se $r \subset V$ è una retta invariante per $F \in \mathrm{End}(V)$ allora r è generata da un autovettore per F.
Verificare che ogni autospazio è un sottospazio invariante.
Verificare che $\mathrm{Im}(F)$ è un sottospazio invariante.

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}^3$. Sia $A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'operatore lineare definito dalla matrice

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

(2.1) Verificare che il piano π di equazioni cartesiane $3x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$ è invariante rispetto a A.

(2.2) Verificare che i vettori

$$\underline{f}_1 = (-3, 6, 5) \qquad \underline{f}_2 = (-1, -3, 0)$$

costituiscono una base del piano π. Sia $A|_\pi : \pi \longrightarrow \pi$ la restrizione di A al piano π. Determinare la matrice associata ad $A|_\pi$ nella base $\{\underline{f}_1, \underline{f}_2\}$.

(2.3) Verificare che $A|_\pi$ *non* è diagonalizzabile e che anzi $A|_\pi$ non ammette autovettori in π. [2]

[1] Ad esempio, sia $V = \mathbb{R}^3$ e sia R_θ è l'operatore di rotazione di un angolo θ attorno ad un asse $\mathbb{R}\underline{v}$. R_θ è un'applicazione lineare ed è chiaro geometricamente che il piano ortogonale a $\mathbb{R}\underline{v}$, e cioè il sottospazio $W = (\mathbb{R}\underline{v})^\perp$, è invariante per R_θ. Fate una figura nel caso $\underline{v} = (0, 0, 1)$. La restrizione di R_θ a questo piano invariante W è l'operatore di rotazione di un angolo θ in W.

[2] Quindi π è invariante per A ma in π non c'è nessuna retta invariante. Questa è anche la situazione che si presenta per una rotazione R attorno ad un asse $\mathbb{R}\underline{v}$: il piano $(\mathbb{R}\underline{v})^\perp$ è invariante per R ma in $(\mathbb{R}\underline{v})^\perp$ non ci sono rette invarianti o, equivalentemente, non ci sono autovettori. Fate una figura e convincetevi di tutto ciò ragionando geometricamente.

Esercizio 3. Spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$. Sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l' operatore lineare definito dalla matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

(3.1) Verificare che i vettori

$$\underline{v}_1 = (1,2,1), \quad \underline{v}_2 = (2,1,-1)$$

costituiscono una base di $\operatorname{Im} T$.

(3.2) *Sia* W*, per definizione, il sottospazio* $\operatorname{Im}(T)$: $W := \operatorname{Im} T$. Sappiamo (Esercizio 1) che W è un sottospazio invariante per T. Consideriamo la restrizione di T al sottospazio invariante W. Denotiamo come al solito questa restrizione con $T|_W$. Determinare la matrice associata a $T|_W$ nella base $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ di W.

(3.3) Stabilire se $T|_W : W \longrightarrow W$ è diagonalizzabile.

(3.4) (Facoltativo) Determinare l'equazione cartesiana, nelle coordinate (x', y') di W associate alla base $\underline{v}_1, \underline{v}_2$, della retta $r \subset \operatorname{Im}(T)$ individuata dal vettore $T(\underline{v}_1 - \underline{v}_2)$.

Esercizio 4. Sia $O(n) \subset GL(n,\mathbb{R}) \subset M_{n\times n}(\mathbb{R})$ il gruppo ortogonale. Sia $A \in O(n)$. Verificare che $\det A = \pm 1$. Verificare che gli autovalori reali di A sono ± 1. [3]

Esercizio 5. Sia $U(n) \subset GL(n,\mathbb{C}) \subset M_{n\times n}(\mathbb{C})$ il gruppo unitario. Sia $A \in U(n)$. Verificare che gli autovalori di A hanno modulo uguale a 1. [4]

Esercizio 6. Sia $A \in O(2)$. Verificare che esiste $\phi \in \mathbb{R}$ tale che

$$A = \begin{vmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{vmatrix} \quad \text{oppure} \quad A = \begin{vmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{vmatrix}$$

[3] *Suggerimento*: sia $\underline{x}$ un autovettore; calcolate $||A\underline{x}||^2$ da una parte utilizzando l'ipotesi e dall'altra utilizzando la definizione di autovettore...

[4] *Suggerimento:* lo stesso dell'esercizio precedente.