Geometria 1. II^0 Modulo. a.a. 01/02. Gruppo A-L (Prof. P. Piazza)
Esercizi per casa del 26/10/01

Svolgere i seguenti esercizi del libro di testo (Vol. 2):
pag 7, Es. 1,2,3,4.
pag 8, Es. 2.
pag 11, Es. I.1

Esercizio 1. Si consideri in $\mathbb{R}^4$ l'applicazione $< , >: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definita da

$$< (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) >= x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

Verificare che quest'applicazione definisce un prodotto scalare. Stabilire se i quattro vettori

$$\{\underline{w}_1 = (1,0,0,0) \quad \underline{w}_2 = (1,1,0,0) \quad \underline{w}_3 = (0,0,1,0) \quad \underline{w}_4 = (0,0,0,1)\}$$

costituiscono una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ dotato di questo nuovo prodotto scalare.

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}_2[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi nell'indeterminata x a coefficienti reali di grado ≤ 2. Definiamo un'applicazione $< , >: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ ponendo

$$< p, q >= p(0)q(0) + p(\frac{1}{2})q(\frac{1}{2}) + p(1)q(1)$$

(2.1) Verificare che $< , >$ definisce un prodotto scalare in V (questo esercizio è stato già risolto in classe, rifatelo da soli).

(2.2) Calcolare $||2 + x||$.

(2.3) Scrivere l'espressione di questo prodotto scalare nella coordinate associate alla base $\{1, x, x^2\}$ di V (si veda Abeasis, Vol. 1 , pag 244) .

(2.4) Scrivere equazioni cartesiane, nelle coordinate associate alla base $\{1, x, x^2\}$, per il sottospazio W ortogonale al vettore $1 - x$.

(2.5) Trovare una base ortogonale di W.

Esercizi facoltativi.

Esercizio 1. Abbiamo visto che $A \in O(2)$ se e solo se $A = R_\phi$ oppure $A = S_\phi$ con

$$R_\phi = \begin{vmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{vmatrix}, \quad S_\phi = \begin{vmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{vmatrix}$$

Verificare che R_ϕ è diagonalizzabile sui reali se e solo se $\phi = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Verificare che S_ϕ è sempre diagonalizzabile sui reali. Descrivere geometricamente questi due operatori.[1]

Esercizio 2. Sia $V = \mathcal{V}_O$. Fissiamo una base ortonormale $\{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$ e siano (x, y, z) le coordinate associate. Sappiamo che è definita in V un'operazione di prodotto vettoriale $\wedge : V \times V \to V$.

[1]Come nell'esercizio 6 del 19/10/01, occorre qui utilizzare le formule trigonometriche

$$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta)\,, \quad \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta)$$

Sia $\underline{a} = a_1\underline{i} + a_2\underline{j} + a_3\underline{k}$ un fissato vettore di V. Si consideri l'applicazione $T_{\underline{a}} : V \longrightarrow V$ che associa a $\underline{v}$ il vettore $\underline{a} \wedge \underline{v}$: $T_{\underline{a}}(\underline{v}) = \underline{a} \wedge \underline{v}$.

(2.1) Verificare che $T_{\underline{a}}$ è lineare.

(2.2) Scrivere la matrice associata a $T_{\underline{a}}$ nella base ortonormale fissata. Questa matrice dipende dalle cordinate di $\underline{a}$. La denotiamo $A_{T_{\underline{a}}}$

(2.3) Determinare il nucleo di $T_{\underline{a}}$ e *la dimensione* dell'immagine di $T_{\underline{a}}$.

Esercizio 3. Si consideri l'applicazione

$$F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

definita da

$$\underline{a} \longrightarrow A_{T_{\underline{a}}}$$

con $A_{T_{\underline{a}}}$ la matrice di cui in (2.2). Verificare che F è un'applicazione lineare. Trovare il nucleo di F. Descrivere l'immagine di F. Dare una formula che leghi $F(\underline{a} \wedge \underline{b})$ ed il prodotto righe per colonne di $F(\underline{a})$ e di $F(\underline{b})$.

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n.

Definizione. V è un'**algebra** se esiste una *moltiplicazione fra vettori*, la denotiamo con $\star$, che è distributiva:

$$(\lambda\underline{v} + \mu\underline{w}) \star \underline{z} = \lambda(\underline{v} \star \underline{z}) + \mu(\underline{w} \star \underline{z})$$
$$\underline{z} \star (\lambda\underline{v} + \mu\underline{w}) = \lambda(\underline{z} \star \underline{v}) + \mu(\underline{z} \star \underline{w}).$$

Un esempio di algebra è dato da $V = \mathrm{Hom}(W, W) \equiv \mathrm{End}(W)$, con W un qualsiasi spazio vettoriale. In questo caso la moltiplicazione $\star$ è per definizione uguale alla composizione di applicazioni: $T \star S := T \circ S$.

Un altro esempio è fornito da $V = \mathrm{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con prodotto uguale per definizione al prodotto righe per colonne.

In questi due esempi il prodotto fra vettori è associativo; in generale però l'associatività non fa parte della definizione di algebra.

Definizione. $(V, \star)$ è un'**algebra di Lie** (leggi "li") se valgono le seguenti due proprietà addizionali :

$$\underline{v} \star \underline{w} = -\underline{w} \star \underline{v}$$
$$(\underline{v} \star \underline{w}) \star \underline{z} + (\underline{w} \star \underline{z}) \star \underline{v} + (\underline{z} \star \underline{v}) \star \underline{w} = 0.$$

La prima è la proprietà di *anticommutazione*. La seconda è detta "identità di Jacobi". Le algebre di Lie giocano un ruolo fondamentale in Matematica e in Fisica.

Lo spazio vettoriale euclideo tridimensionale V con il prodotto fra vettori definito dal prodotto vettoriale $\wedge$ è un'algebra di Lie di dimensione 3: la proprietà distributiva e di anticommutazione sono già enunciate nel libro di testo; per dimostrare l'identità di Jacobi su usa, ad esempio, la seguente identità:

$$(\underline{v}_1 \wedge \underline{v}_2) \wedge \underline{v}_3 = (< \underline{v}_1, \underline{v}_3 >)\underline{v}_2 - (< \underline{v}_2, \underline{v}_3 >)\underline{v}_1$$

Lascio a voi i dettagli [2].

Esercizio 4.

(4.1) Verificare che $\mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ con il prodotto

$$A \star B := A \cdot B - B \cdot A$$

[2]Dimostrate quindi quest'ultima identità e poi utilizzatela per dimostrare l'identità di Jacobi

(con $\cdot$ = prodotto righe per colonne) è un'algebra di Lie di dimensione 9.
(4.2) Verificare che $\mathcal{A}_{3\times 3}(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) | A = -A^T\}$ con lo stesso prodotto è un'algebra di Lie di dimensione 3.

Definizione: Un omomorfismo fra due algebre $(V, \star)$ e $(W, \odot)$ è un'applicazione *lineare* $S : V \longrightarrow W$ che rispetta il prodotto: $S(\underline{a} \star \underline{b}) = S(\underline{a}) \odot S(\underline{b})$. S è un isomorfismo di algebre se inoltre S è biunivoco (iniettivo e suriettivo). Se $(V, \star)$ e $(W, \odot)$ sono algebre di Lie ed S è una biezione lineare che rispetta il prodotto allora si dice che S è un *isomorfismo di algebre di Lie.*

Esercizio 5. Mettendo insieme gli esercizi 2, 3 e 4, scrivete una dimostrazione per il seguente

Teorema. Sia $V = \mathcal{V}_O$ lo spazio vettoriale euclideo. Sia $(V, \wedge)$ l'algebra di Lie definita considerando come prodotto fra vettori il prodotto vettoriale $\wedge$. Sia $(\mathcal{A}_{3\times 3}(\mathbb{R}), \star)$ l'algebra di Lie delle matrici antisimmetriche con prodotto $\star$ definito da $A \star B = A \cdot B - B \cdot A$. Esiste un isomorfismo di algebre di Lie

$$F : (V, \wedge) \to (\mathcal{A}_{3\times 3}, \star)$$

Suggerimento: avete già un candidato per F...[3]

[3] Un bravo/brava a chi è arrivato in fondo: questo è un classico risultato, importante sia in Geometria che in Meccanica; lo trovate dato per esercizio, ad esempio, nel libro *Foundations of Mechanics* di R. Abraham e J. Marsden (ma io l'ho ovviamente diluito in vari esercizi....).