Geometria 1. II^0 Modulo. a.a. 01/02. Gruppo A-L (Prof. P. Piazza)
Complementi sul teorema spettrale

Sia V uno spazio vettoriale reale e supponiamo che sia definito in V un prodotto scalare $<\,,\,>_V$.
Un esempio è dato ovviamente da $\mathbb{R}^n$ con il prodotto scalare canonico $<\,,\,>$. In quel contesto abbiamo verificato che le matrici simmetriche definiscono operatori autoaggiunti: *se* $A = A^T$ *allora* $< A\underline{v}, \underline{w} > = < \underline{v}, A\underline{w} >$ $\forall \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$. Questa osservazione è alla base della seguente definizione:
Definizione. Sia $T \in \mathrm{End}(V)$. Diremo che T è autoaggiunto (o simmetrico) se

$$< T\underline{v}, \underline{w} >_V = < \underline{v}, T\underline{w} >_V \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V$$

Esempio. Sia V lo spazio vettoriale delle funzioni reali infinitamente derivabili e periodiche di periodo 2π (tali cioè che $f(x) = f(x + 2\pi)$). Sia $<\,,\,>$ l'applicazione da $V \times V \to \mathbb{R}$ definita da

$$< f, g > = \int_0^{2\pi} fg dx$$

Abbiamo verificato che quest'applicazione è simmetrica, bilineare e definita positiva. Essa definisce quindi un prodotto scalare in V. Consideriamo l'operatore T definito da

$$Tf = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

In parole T associa ad ogni funzione la sua derivata seconda. Innanzitutto T è lineare (per le proprietà della derivata); inoltre è ben ben definito come operatore lineare da V in V (perché la derivata di una funzione periodica è a sua volta periodica, basta calcolare la derivata in x_0 e $x_0 + 2\pi$ come limite del rapporto incrementale). Infine T **è simmetrico**; lo verifichiamo utilizzando la formula di integrazione per parti e l'ipotesi di periodicità. Per definizione

$$< Tf, g > = \int_0^{2\pi} \frac{d^2 f}{dx^2} g dx\,;$$

ora utilizziamo l'integrazione per parti ed otteniamo per il membro a destra:

$$-\int_0^{2\pi} \frac{df}{dx}\frac{dg}{dx} + \int_0^{2\pi} \frac{d}{dx}(\frac{df}{dx}g)dx = -\int_0^{2\pi} \frac{df}{dx}\frac{dg}{dx}dx + (\frac{df}{dx})(2\pi)g(2\pi) - (\frac{df}{dx})(0)g(0)$$

Ma dall'ipotesi di periodicità otteniamo

$$(\frac{df}{dx})(2\pi)g(2\pi) - (\frac{df}{dx})(0)g(0) = 0$$

e quindi, in definitiva

$$< Tf, g > = -\int_0^{2\pi} \frac{df}{dx}\frac{dg}{dx}dx$$

Ma ora riapplichiamo l'integrazione per parti al membro a destra ottenendo infine

$$< Tf, g > = -\left(-\int_0^{2\pi} f\frac{d^2 g}{dx^2}dx\right) = \int_0^{2\pi} f\frac{d^2 g}{dx^2}dx = < f, Tg >$$

che era quello che dovevamo verificare.

Supponiamo ora che $(V, <\,,\,>_V)$ sia uno spazio vettoriale metrico di dimensione *finita*. Abbiamo verificato a lezione che la matrice associata ad un operatore autoaggiunto *in una base ortonormale* è una matrice simmetrica. Abbiamo ora tutti gli strumenti per dimostrare il seguente

Teorema spettrale. Sia V uno spazio vettoriale reale metrico di dimensione finita. Sia $T \in \mathrm{End}(V)$ un operatore autoaggiunto. Allora esiste una base ortonormale di V costituita da autovettori di T.

Dimostrazione. Per induzione su $n = \dim V$. Per $n = 1$ non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo vero il teorema per spazi vettoriali di dimensione $n-1$ e domostriamolo per quelli di dimensione n.
Fissiamo una qualsiasi base ortonormale di V; la matrice associata a T in questa base è simmetrica. Per quanto visto a lezione, le radici del polinomio caratteristico associato a tale matrice sono tutte reali. In particolare T ammette un autovalore reale, sia esso λ; sia $\underline{e}_1$ un autovettore associato a tale autovalore. Possiamo assumere che $||\underline{e}_1|| = 1$. Consideriamo ora $W = (\mathbb{R}\underline{e}_1)^\perp$. *Il sottospazio W è invariante per T.*[1] Ha senso quindi considerare la restrizione di T a questo sottospazio: $T|_W$. Il prodotto scalare $<\,,\,>_V$ definisce per restrizione un'applicazione $W \times W \to \mathbb{R}$ che è ovviamente ancora bilineare, simmetrica e definita positiva. W è quindi esso stesso uno spazio vettoriale con prodotto scalare [2]; l'operatore $T|_W : W \to W$ è ovviamente autoaggiunto rispetto a questo prodotto scalare [3]. Ma W ha dimensione $n-1$ e quindi, per ipotesi induttiva, W ammette una base ortonormale $\underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ costituita da autovettori per $T|_W$; è chiaro che $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ è una base ortonormale di V costituita da autovettori per T. Il teorema è dimostrato.

Sia ora V uno spazio vettoriale complesso e supponiamo che sia definito in V un prodotto hermitiano $<\ |\ >_V$. Sia $T \in \mathrm{End}(V)$.

Definizione. Diremo che T è autoaggiunto o hermitiano se $< T\underline{v}|\underline{w} > = < \underline{v}|T\underline{w} >_V$ $\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$.

Esempio. Sia V lo spazio delle funzioni C^∞ da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ che sono periodiche di periodo 2π. Quindi $f = u + iv$ con u, v funzioni C^∞ a valori reali e periodiche di periodo 2π. Poniamo, per definizione,

$$\frac{df}{dx} := \frac{du}{dx} + i\frac{dv}{dx} \qquad \int_0^{2\pi} f dx := \int_0^{2\pi} u dx + i \int_0^{2\pi} v dx\,.$$

L'applicazione $V \times V \to \mathbb{C}$ definita da

$$< f|g >_V = \int_0^{2\pi} f\overline{g} dx$$

definisce un prodotto hermitiano. La verifica è semplice. Procedendo come nell'esempio precedente si verifica che l'operatore lineare $T : V \to V$ definito da $Tf = \frac{1}{i}\frac{df}{dx}$ è un operatore autoaggiunto in V rispetto al prodotto hermitiano appena definito.

---

[1] Dimostriamo questa proprietà fondamentale: sia $\underline{w} \in W$, dobbiamo verificare che $T\underline{w} \in W$ e cioè che $< T\underline{w}, \underline{e}_1 >_V = 0$; ma $< T\underline{w}, \underline{e}_1 >_V = < \underline{w}, T\underline{e}_1 >_V$ per l'ipotesi che T è autoaggiunto e $T\underline{e}_1 = \lambda\underline{e}_1$, quindi $< T\underline{w}, \underline{e}_1 >_V = \lambda < \underline{w}, \underline{e}_1 >$ che è uguale a zero dato che $\underline{w} \in W = (\mathbb{R}\underline{e}_1)^\perp$. Quindi W è invariante.

[2] ciò è vero per ogni sottospazio di V

[3] la formula $< T\underline{v}\,\underline{w} >_V = < \underline{v}, T\underline{w} >_V$ è verificata *per ogni* $\underline{v}, \underline{w} \in V$, in particolare per i vettori di W !

Sia ora V di dimensione finita. Abbiamo verificato a lezione che la matrice associata ad un operatore autoaggiunto in una base ortonormale è *hermitiana*. Ne segue che *gli autovalori di un operatore autoaggiunto in uno spazio vettoriale hermitiano sono tutti reali.*

Teorema spettrale. Sia $(V, < \mid >_V)$ uno spazio vettoriale complesso hermitiano. Sia T un operatore autoaggiunto. Allora esiste in V una base ortonormale costituita da autovettori per T.

La dimostrazione è del tutto analoga a quella data nel caso reale.