GEOMETRIA I (2^o MODULO), A.A. 2001/02

PROFF. PIAZZA, O'GRADY

Prova scritta del 13 Novembre 2001

1. Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio definito da

$$W := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) |\ x_1 + x_2 = x_3 - x_4 = 0\}.$$

(1.1). Determinare equazioni cartesiane per l'ortogonale $W^\perp$.

(1.2). Determinare la matrice associata a P_W, l'operatore di proiezione ortogonale su W, nella base standard (canonica) di $\mathbb{R}^4$.

2. Sia $W \subset \mathbb{R}^5$ il sottospazio definito da

$$W := \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) |\ x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 0\}.$$

Determinare il vettore $h \in W^\perp$ tale che

$$||h|| = 2, \quad \langle h, \mathbf{e}_2 \rangle > 0.$$

3. Sia

$$A := \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare una matrice (3×3) invertibile C tale che $C^{-1}AC$ sia triangolare superiore.

4. Si consideri la forma quadratica su $\mathbb{R}^4$ definita da

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ che diagonalizzi questa forma quadratica.

5. Determinare la forma canonica affine della forma quadratica definita su $M_{2,2}(\mathbb{R})$ dalla formula

$$\varphi(A) := Tr(A^2).$$

(Spiegazione: identifichiamo $M_{2,2}(\mathbb{R})$ con $\mathbb{R}^4$.)