Geometria 1. II^0 Modulo. a.a. 01/02. Gruppo A-L (Prof. P. Piazza)

Complementi su forme quadratiche e forme bilineari

Sia V uno spazio vettoriale reale. Sia
$$b : V \times V \to \mathbb{R}$$
una forma bilineare simmetrica (Abeasis, Vol 2, pag 32). Sia V di dimensione n e $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ una base di V. Seguendo una notazione adottata l'anno scorso denotiamo con $\mathbb{V}$ tale base. Rimane allora definita la matrice associata a $b(\,,\,)$ nella base fissata; per definizione questa è la matrice *simmetrica*
$$A_b^{\mathbb{V}} := |b(\underline{v}_i, \underline{v}_j)|\,.$$
L'espressione della forma bilineare nelle coordinate fissate dalla base $\mathbb{V} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ è data da

$$(1) \quad b(x_1\underline{v}_1 + \cdots + x_n\underline{v}_n\,,\, y_1\underline{v}_1 + \cdots + y_n\underline{v}_n) = |y_1, \dots, y_n|\, A_b^{\mathbb{V}} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} = \underline{y}^T A_b^{\mathbb{V}}\, \underline{x}$$

Questa formula segue dalla bilinearità e dalla simmetria.
Viceversa, data una matrice *simmetrica* $A = |a_{ij}|$ possiamo definire una forma bilineare simmetrica $b_A : V \times V \to \mathbb{R}$ ponendo

$$(2) \quad b_A(x_1\underline{v}_1 + \cdots + x_n\underline{v}_n\,,\, y_1\underline{v}_1 + \cdots + y_n\underline{v}_n) = |y_1, \dots, y_n|\, A \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} = \underline{y}^T A\, \underline{x}$$

Si verifica immediatamente che la matrice associata a $b_A(\,,\,)$ nella base fissata $\mathbb{V}$ è proprio A.

Sia $\mathbb{F} = \{\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_n\}$ un'altra base di V. Sia $A_b^{\mathbb{F}}$ la matrice associata a $b(\,,\,)$ in questa base. Il vettore generico $\underline{v}$ ha coordinate $(x_1, \dots, x_n)$ nella base $\mathbb{V}$ e coordinate $(x'_1, \dots, x'_n)$ nella base $\mathbb{F}$; analogamente $\underline{w}$ ha coordinate $(y_1, \dots, y_n)$ nella base $\mathbb{V}$ e coordinate $(y'_1, \dots, y'_n)$ nella base $\mathbb{F}$. Sia C la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $\underline{f}_j$ nella base $\mathbb{V}$; si ha allora $\underline{x} = C\underline{x}'$, $\underline{y} = C\underline{y}'$ e quindi
$$b(\underline{v}, \underline{w}) = \underline{y}^T A_b^{\mathbb{V}} \underline{x} = (C\underline{y}')^T A_b^{\mathbb{V}} (C\underline{x}') = (\underline{y}')^T (C^T A_b^{\mathbb{V}} C)\underline{x}'$$
da cui deduciamo
$$(\underline{y}')^T (C^T A_b^{\mathbb{V}} C)\underline{x}' = (\underline{y}')^T A_b^{\mathbb{F}} \underline{x}'\,, \quad \forall \underline{x}', \underline{y}'$$
da cui, infine,
$$A_b^{\mathbb{F}} = C^T A_b^{\mathbb{V}} C$$
Quindi *le matrici associate ad una forma bilineare in due basi diverse sono congruenti.* Viceversa siano A e D congruenti, $D = C^T AC$. Sia b_A la forma bilineare definita dalla formula (2) nella base $\mathbb{V}$; sia $\mathbb{F}$ la base che ha come j-mo vettore quello che ha coordinate, nella base $\mathbb{V}$, uguali alla j-ma colonna di C; sia b_D la

forma bilineare definita dalla formula (2) ma nelle coordinate associate alla base $\mathbb{F}$. Si ha allora

$$b_A(\underline{v}, \underline{w}) = \underline{y}^T A \underline{x} = (C\underline{y}')^T A(C\underline{x}') = \underline{y}' D \underline{x}' = b_D(\underline{v}, \underline{w})$$

e quindi b_A e b_D definiscono la stessa forma bilineare.

Conclusione. *Due matrici simmetriche rappresentano la stessa forma bilineare simmetrica in due basi diverse se e solo se sono congruenti.*

Consideriamo in particolare $V = \mathbb{R}^n$ con la base canonica. Per quanto appena visto, data una forma bilineare $b(,)$ otteniamo una matrice simmetrica fissando una base, ad esempio la base canonica $\mathbb{E} = \{\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n\}$: $b(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{y}^T A \underline{x}$, con $A = A_b^{\mathbb{E}}$. In altre parole $b(,) = b_A(,)$ con $A = A_b^{\mathbb{E}}$. Viceversa possiamo dare una forma bilineare simmetrica semplicemente assegnando una matrice simmetrica A e considerando

$$b_A(\underline{x}, \underline{y}) := \underline{y}^T A \underline{x} \,,$$

ed è chiaro che la matrice associata a questa forma bilineare nella base canonica è proprio A.

Associata ad una forma bilineare simmetrica $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ abbiamo la forma quadratica $\phi(\underline{x}) = b(\underline{x}, \underline{x})$, che è detta forma quadratica associata a $b(,)$. *Viceversa* data una forma quadratica ϕ,

$$\phi(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x}, \quad A = A^T,$$

abbiamo una matrice simmetrica A e quindi una forma bilineare b_A: $b_A(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{y}^T A \underline{x}$. È ovvio che $b_A(\underline{x}, \underline{x}) = \phi(\underline{x})$ e quindi ϕ è proprio la forma quadratica associata a b_A. (Questa forma bilineare appena costruita è detta *forma bilineare polare di* ϕ.)
In definitiva: è del tutto equivalente assegnare in $\mathbb{R}^n$ una forma bilineare simmetrica oppure la forma quadratica associata.

Come applicazione del teorema spettrale abbiamo visto che ogni forma quadratica si diagonalizza; esiste cioè una base $\{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_n\}$ di $\mathbb{R}^n$, con coordinate associate $\underline{y}$, tale che ϕ si scriva in queste coordinate nella forma

$$\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \,.$$

Equivalentemente, se

$$\phi(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x}$$

allora A è congruente ad una matrice *diagonale* Λ.
È chiaro che ciò implica il seguente:

Teorema *Sia $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica. Allora esiste una base di $\mathbb{R}^n$, $\{\underline{f}_1, \ldots, \underline{f}_n\}$, che diagonalizza $b(,)$, tale cioè che $b(\underline{f}_i, \underline{f}_j) = 0$ per $i \neq j$.*[1]

[1]Infatti:
$b(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{y}^T A \underline{x}$ con $A = A_b^{\mathbb{E}}$ ed $\mathbb{E} = \{\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n\}$ la base canonica. Sia C la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $\underline{f}_j$ nella base canonica. Allora

$$b(\underline{f}_i, \underline{f}_j) = \underline{f}_j^T A \underline{f}_i = (C^T AC)_{ij} = \Lambda_{ij} = 0 \quad \text{se} \quad i \neq j$$

come si voleva.

Vogliamo dare una dimostrazione induttiva di questo teorema che non faccia uso del teorema spettrale. Dimostreremo il teorema direttamente su uno spazio vettoriale qualsiasi V. Premettiamo la seguente

Osservazione fondamentale. Se $\underline{f}$ è un vettore non isotropo di V allora vale la decomposizione

$$V = \mathbb{R}\underline{f} \oplus (\mathbb{R}\underline{f})^{\perp_b} \tag{3}$$

dove

$$(\mathbb{R}\underline{f})^{\perp_b} = \{\underline{v} \in V \mid b(\underline{v}, \underline{f}) = 0\}.$$

In generale, per un qualsiasi sottospazio U di V si pone

$$U^{\perp_b} = \{\underline{v} \in V \mid b(\underline{v}, \underline{u}) = 0\,,\ \forall \underline{u} \in U\}.$$

$U^{\perp_b}$ è detto il b-ortogonale di U. La dimostrazione della decomposizione (3) utilizza una tecnica già vista per i prodotti scalari (che sono particolari forme bilineari simmetriche). [2]

Dimostrazione teorema. Procediamo per induzione su $\dim V$. Se $\dim V = 1$ non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo vero il teorema per spazi vettoriali di dimensione $n-1$ e dimostriamolo per spazi vettoriali di dimensione n.
Se $b(\ ,\ )$ è la forma bilineare identicamente uguale a zero, allora non c'è nulla da dimostrare, dato che ogni base è diagonalizzante.
Se $b(\ ,\ )$ non è identicamente nulla allora $\exists\, \underline{v}\,,\ \underline{w} \in V$ non nulli tali che $b(\underline{v}, \underline{w}) \neq 0$. Ora, fra i tre vettori $\underline{v}, \underline{w}, \underline{v}+\underline{w}$ ne esiste almeno uno che è *non isotropo*. Infatti se $\underline{v}$ e $\underline{w}$ sono isotropi allora $b(\underline{v}+\underline{w}, \underline{v}+\underline{w}) = b(\underline{v}, \underline{v}) + 2b(\underline{v}, \underline{w}) + b(\underline{w}, \underline{w}) = 0 + 2b(\underline{v}, \underline{w}) + 0 \neq 0$ come si voleva. Riassumendo: se $b(\ ,\ )$ non è identicaente nulla allora esiste un vettore non isotropo $\underline{f}_1$. Ma allora, per l'*Osservazione fondamentale*

$$V = \mathbb{R}\underline{f}_1 \oplus (\mathbb{R}\underline{f}_1)^{\perp_b}.$$

Sia $b'(\ ,\ )$ la restrizione di $b(\ ,\ )$ al sottospazio $(n-1)$-dimensionale $(\mathbb{R}\underline{g}_1)^{\perp_b}$. $b'(\ ,\ )$ è ovviamente una forma bilineare simmetrica su uno spazio vettoriale di dimensione $(n-1)$. Per ipotesi induttiva esiste una base $\{\underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_n\}$ che diagonalizza $b'(\ ,\ )$. Ma allora è immediato verificare che $\{\underline{f}_1, \underline{f}_2, \ldots, \underline{f}_n\}$ è una base diagonalizzante per $b(\ ,\ )$. Il teorema è dimostrato.

Quindi possiamo diagonalizzare le forme bilineari simmetriche, o equivalentemente le forme quadratiche, senza utilizzare il teorema spettrale.

---

[2] Per ipotesi $\underline{f}$ è non isotropo; quindi, per definizione, $b(\underline{f}, \underline{f}) \neq 0$. Scriviamo allora

$$\underline{v} = \frac{b(\underline{v}, \underline{f})}{b(\underline{f}, \underline{f})}\underline{f} + (\underline{v} - \frac{b(\underline{v}, \underline{f})}{b(\underline{f}, \underline{f})}\underline{f})$$

Il primo addendo a destra appartiene sicuramente a $\mathbb{R}\underline{f}$. Verifichiamo che il secondo addendo appartiene a $(\mathbb{R}\underline{f})^{\perp_b}$; utilizzando la bilinearità abbiamo:

$$b(\underline{v} - \frac{b(\underline{v}, \underline{f})}{b(\underline{f}, \underline{f})}\underline{f}\,,\ \underline{f}) = b(\underline{v}, \underline{f}) - b(\frac{b(\underline{v}, \underline{f})}{b(\underline{f}, \underline{f})}\underline{f}, \underline{f}) = b(\underline{v}, \underline{f}) - (\frac{b(\underline{v}, \underline{f})}{b(\underline{f}, \underline{f})})b(\underline{f}, \underline{f}) = 0$$

Quindi

$$V = \mathbb{R}\underline{f} + (\mathbb{R}\underline{f})^{\perp_b}$$

Verifichaimo anche che $\mathbb{R}\underline{f} \cap (\mathbb{R}\underline{f})^{\perp_b} = \underline{0}$; se $\underline{w} \in \mathbb{R}\underline{f} \cap (\mathbb{R}\underline{f})^{\perp_b}$ allora $\underline{w} = \alpha\underline{f}$ (perché $\underline{w} \in \mathbb{R}\underline{f}$) e $b(\underline{w}, \underline{f}) = 0$ (perché $\underline{w} \in (\mathbb{R}\underline{f})^{\perp_b}$). Ma allora deve essere $\alpha b(\underline{f}, \underline{f}) = 0$ ed essendo $\underline{f}$ non isotropo deve necessariamente essere $\alpha = 0$ cioè $\underline{w} = \underline{0}$. Abbiamo dimostrato che $V = \mathbb{R}\underline{f} \oplus (\mathbb{R}\underline{f})^{\perp_b}$.

Sia $\{\underline{f}_1, \dots, \underline{f}_n\}$ la base diagonalizzante ottenuta tramite il procedimento induttivo appena spiegato. Se $\alpha_j = b(\underline{f}_j, \underline{f}_j)$ allora possiamo assumere, a meno di riordinare i vettori,

$\alpha_i > 0 \quad$ se $i \leq \rho$
$\alpha_i < 0 \quad$ se $(\rho + 1) \leq i \leq r$
$\alpha_i = 0 \quad$ se $(r + 1) \leq i \leq n$.

Poniamo

$\underline{v}_i = \frac{1}{\sqrt{\alpha_i}} \underline{f}_i \quad$ se $i \leq \rho$
$\underline{v}_i = \frac{1}{\sqrt{-\alpha_i}} \underline{f}_i \quad$ se $(\rho + 1) \leq i \leq r$
$\underline{v}_i = \underline{f}_i \quad$ se $(r + 1) \leq i \leq n$.

La matrice associata a $b(\ ,\ )$ in questa base è

$$\begin{vmatrix} I_\rho & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0_{n-r} \end{vmatrix}.$$

Teorema. Gli interi ρ ed r dipendono solo da $b(\ ,\ )$ e non dalla particolare base diagonalizzante scelta.

Dimostrazione. r è il rango della matrice diagonale

$$\begin{vmatrix} I_\rho & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0_{n-r} \end{vmatrix}$$

ed è quindi anche il rango di una qualsiasi matrice ad essa congruente. In particolare se $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$ è un'altra base diagonalizzante allora la matrice associata a $b(\ ,\ )$ in questa base, che è una matrice diagonale che chiamiamo Δ, deve avere rango r. Ma allora ci sono esattamente r elementi non nulli sulla diagonale principale di Δ, come si voleva.

Per vedere che ρ dipende solo da $b(\ ,\ )$ basta riadattare la dimostrazione della Proposizione pag. 1 dei "Complementi sulla diagonalizzazione delle forme quadratiche" distribuiti l' 8/11/01. [3] Il teorema è dimostrato.

Esercizio. Sia $b_A : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica definita dalla matrice simmetrica

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

[3] Quindi, procediamo per assurdo e supponiamo che $\sigma < \rho$ sia il numero di elementi positivi sulla diagonale principale di Δ. Siano $\underline{z}$ le coordinate associate a $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ e $\underline{t}$ le coordinate associate a $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$. Se $\underline{v}$ è il generico vettore di V allora

$$b(\underline{v}, \underline{v}) = z_1^2 + \dots + z_\rho^2 - z_{\rho+1}^2 - z_r^2$$

e

$$b(\underline{v}, \underline{v}) = t_1^2 + \dots + t_\sigma^2 - t_{\sigma+1}^2 - \dots - t_r^2 .$$

Considerando un vettore non-nullo

$$\underline{v} \in \mathrm{Span}(\underline{v}_1 \dots, \underline{v}_\rho) \cap \mathrm{Span}(\underline{a}_{\sigma+1}, \dots, \underline{a}_r),$$

certamente esistente per Grassmann, arriviamo all'assurdo che $b(\underline{v}, \underline{v}) > 0$ nel primo sistama di coordinate e $b(\underline{v}, \underline{v}) \leq 0$ nel secondo.

0) Applicando il procedimento induttivo appena visto determinare una base $\mathbb{V}$ di $\mathbb{R}^4$ tale che $A_b^{\mathbb{V}}$ sia nella forma di Sylvester. [4]

1) Determinare una base *ortonormale* $\mathbb{H}$ di $\mathbb{R}^4$ che diagonalizzi $b(\ ,\ )$.

2) Determinare una base $\mathbb{G}$ di $\mathbb{R}^4$ che diagonalizzi l'operatore $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ ma *non* diagonalizzi la forma $b(\ ,\ )$.
Suggerimento. Sicuramente dovete fissare una base $\mathbb{G}$ di autovettori per A; come andranno scelti questi autovettori per essere tali da *non* diagonalizzare $b(\ ,\ )$?

3) Determinare una base $\mathbb{K}$ di $\mathbb{R}^4$ che diagonalizzi $b(\ ,\ )$ ma *non* diagonalizzi A.

Soluzione.

0) Si verifica che il determinante di A è diverso da zero (è uguale a 1); ne segue che $r = 4$. Vogliamo innanzitutto determinare una base diagonalizzante $\mathbb{W}=\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3, \underline{w}_4\}$ per $b(\ ,\ )$, ci occuperemo poi di passare dalla forma diagonale alla forma di Sylvester.
Osserviamo preliminarmente che questi 4 vettori dovranno essere non isotropi dato $r = 4$. Per costruire $\mathbb{W}$ ci ispiriamo al procedimento induttivo che ci ha permesso di dimostrare, in generale, l'esistenza di basi diagonalizzanti per una qualsiasi forma bilineare simmetrica. Denotiamo con $\underline{u} = (u_1, \ldots, u_4)$ una 4-pla in $\mathbb{R}^4$.
Partiamo da un vettore non isotropo $\underline{w}_1$. Ad esempio il vettore $\underline{w}_1 = (1, 1, 1, 1)$ per il quale si ha $b(\underline{w}_1, \underline{w}_1) = 1 - 1 + 2 = 2 \neq 0$. Consideriamo il sottospazio b-ortogonale a $\underline{w}_1$. Questo è il sottospazio

$$\{\underline{u} \in \mathbb{R}^4 \mid b(\underline{u}, (1,1,1,1)) = 0\} = \{(u_1, u_2, u_3, u_4) \mid u_1 - u_2 + u_3 + u_4 = 0\}$$

Scegliamo il secondo vettore $\underline{w}_2$ della base diagonalizzante in questo sottospazio e non isotropo. Ad esempio il vettore $\underline{w}_2 = (1, 1, -1, 1)$ che verifica l'equazione trovata ed è tale che $b(\underline{w}_2, \underline{w}_2) = -2$.

Il terzo vettore $\underline{w}_3$ della base diagonalizzante va cercato fra i vettori non isotropi che verificano simultaneamente

$$\begin{cases} b(\underline{u}, (1,1,1,1)) = 0 \\ b(\underline{u}, (1,1,1,-1)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_2 + u_3 + u_4 = 0 \\ u_1 - u_2 + u_3 - u_4 = 0 \end{cases}$$

Il vettore $\underline{w}_3 = (1, 0, 0, -1)$ verifica entrambe queste equazioni ed è tale che $b(\underline{w}_3, \underline{w}_3) = 1$.

Rimane da determinare il quarto vettore: deve essere non isotropo e b-ortogonale a $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3$. Il vettore $\underline{w}_4$ va allora cercato nel sottospazio dei vettori $\underline{u} \in \mathbb{R}^4$ che verificano simultaneamente

$$\begin{cases} b(\underline{u}, (1,1,1,1)) = 0 \\ b(\underline{u}, (1,1,1,-1)) = 0 \\ b(\underline{u}, (1,0,0,-1)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - u_2 + u_3 + u_4 = 0 \\ u_1 - u_2 + u_3 - u_4 = 0 \\ u_1 - u_3 = 0 \end{cases}$$

[4] Equivalentemente: **0')** determinare una base di $\mathbb{R}^4$ con coordinate associate $\underline{z}$ rispetto alla quale la forma quadratica ϕ definita da A si scriva nella forma canonica affine. Ancora equivalentemente: **0")** determinare una matrice invertibile C tale che $C^T AC$ sia nella forma di Sylvester.

Una soluzione di questo sistema è data dal vettore $\underline{w}_4 = (1,2,1,0)$; inoltre $b(\underline{w}_4, \underline{w}_4) = -3$. Se $\mathbb{W}$ è la base $\{\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_4\}$ si ha quindi

$$A_b^{\mathbb{W}} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} .$$

Questo vuol dire che $\mathbb{W}$ è una base diagonalizzante come richiesto. Equivalentemente se C è la matrice che ha come colonne le coordinate dei vettori $\underline{w}_j$ nella base canonica allora

$$C^T AC = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} .$$

La base

$$\mathbb{V} = \{\underline{v}_1 := \frac{\underline{w}_1}{\sqrt{2}}\,; \quad \underline{v}_2 := \underline{w}_3\,; \quad \underline{v}_3 := \frac{\underline{w}_2}{\sqrt{2}}\,; \quad \underline{v}_4 := \frac{\underline{w}_4}{\sqrt{3}}\,\}$$

fornisce allora la matrice del teorema di Sylvester:

$$A_b^{\mathbb{V}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} .$$

La soluzione di **0** è completa.

1) Sia $\mathbb{H}$ una base ortonormale per l'operatore $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$. Abbiamo già determinato questa base nell'Esercizio 6 del compito del 2/11: vi ricordo che A ha autovalori 1 e -1 entrambi di molteplicità 2; avevamo visto che una base ortonormale di $V_A(1)$ è data da

$$\underline{h}_1 = (1,0,0,0)\,, \quad \underline{h}_2 = (0,0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$$

e che una base ortonormale di $V_A(-1)$ è data da

$$\underline{h}_3 = (0,1,0,0)\,, \quad \underline{h}_4 = (0,0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})\,.$$

I 4 vettori $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3, \underline{w}_4\}$ sono quindi una base ortonormale $\mathbb{H}$ di $\mathbb{R}^4$. Sia O è la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $\underline{w}_j$:

$$O = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

allora O è ortogonale; inoltre

$$A_b^{\mathbb{H}} = O^T AO = O^{-1}AO = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

che completa la soluzione di **1)**.

2) Basterà prendere una base di autovettori per l'operatore $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ che non sia ortonormale. Dato che $V_A(1) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_2 = 0 \;\text{ e }\; -x_3 + x_4 = 0\}$ e che $V_A(-1) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 = 0 \;\text{ e }\; x_3 + x_4 = 0\}$, basterà scegliere $\underline{g}_1 = (1,0,1,1)$,

$\underline{g}_2 = (2,0,0,0)$ e poi $\underline{g}_3 = (0,1,0,0)$ $\underline{g}_4 = (0,1,-1,1)$. Dobbiamo verificare che non succeda qualche miracolo e cioè che $A_b^{\mathbb{G}}$ sia effettivamente non-diagonale: ed infatti $b_A(\underline{g}_2, \underline{g}_1) = 2 \neq 0$ e abbiamo finito perché $\mathbb{G} = \{\underline{g}_1, \ldots, \underline{g}_4\}$ è una base di autovettori per A che però non diagonalizza $b_A(\, , \,)$.

3) Basterà scegliere la base di $\mathbb{R}^4$ costruita in **0)**; quella base non aveva nulla a che fare con gli autovettori dell'operatore $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ ed infatti $A\underline{w}_1 = A(1,1,1,1) = (1,-1,1,1)$ che non è certo uguale né a $\underline{w}_1$, né a $-\underline{w}_1$. Quindi la matrice associata a $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ nella base $\mathbb{W}$ non è diagonale, mentre abbiamo visto che $A_b^{\mathbb{W}}$, la matrice associata alla forma bilineare nella base $\mathbb{W}$, è diagonale.
La soluzione di tutto l'Esercizio è ora completa.

Riassumendo: una matrice simmetrica reale A definisce
(i) un operatore lineare $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (che è simmetrico: $< A\underline{x}, \underline{y} > = < \underline{x}, A\underline{y} >$);
(ii) una forma quadratica $\phi(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x}$ o, equivalentemente, una forma bilineare $b(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{y}^T A \underline{x}$.

- Una base di autovettori per l'operatore $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diagonalizza l'operatore A ma non diagonalizza, in generale, la forma bilineare $b(\, , \,)$ (o, equivalentemente, la forma quadratica $\phi(\,)$).
- Una base cotruita con il procedimento induttivo spiegato in queste note, diagonalizza $b(\, , \,)$ (e quindi $\phi(\,)$) ma non diagonalizza, in generale, l'operatore A.
- Una base **ortonormale** di autovettori per A diagonalizza simultaneamente l'operatore A e la forma bilineare $b(\, , \,)$.