Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2020-21.
Geometria. Canale 3.
Compito a casa del 30/10/20

Svolgere gli esercizi 5.2, 5.3, 5.7 del libro di testo. [1]

Esercizio 1. Consideriamo l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita dalla matrice

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Scrivere l'espressione di L_A: $L_A \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \ldots.$ Determinare l'immagine tramite L_A del vettore $(1, 2, 1)$. Determinare l'immagine tramite L_A dei vettori della base canonica. Stabilire se L_A è iniettiva. Stabilire se L_A è surgettiva. Giustificare.

Esercizio 2. Sia $L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla matrice

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Scrivere l'espressione di L_A, come nell'esercizio precedente. Determinare la dimensione del nucleo di L_A. Determinare una base per lo spazio immagine.

Esercizio 3. Spiegare perché esiste ed è unica l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(1, 1, 1) = (2, 3, 2), \quad F(0, 1, 1) = (1, 3, 2), \quad F(0, 1, -1) = (1, 1, -2).$$

(Per ragioni tipografiche scriveremo spesso i vettori di $\mathbb{R}^n$ per righe.) Determinare l'immagine tramite F degli elementi della base canonica: $\underline{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\underline{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\underline{e}_3 = (0, 0, 1)$. (*Suggerimento*: esprimere i vettori della base canonica come combinazioni lineari dei vettori $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(0, 1, -1)$ e applicare la linearità.)

Esercizio 4. Siano V e W due spazi vettoriali e $T : V \to W$ un'applicazione lineare. Sia $n = \dim V$ e $m = \dim W$.

4.1 Stabilire se la seguente proposizione è vera o falsa:
se $n > m$ l'applicazione lineare T non può essere iniettiva.

4.2. Stabilire se la seguente proposizione è vera o falsa:
se $n < m$ l'applicazione lineare T non può essere suriettiva.

Giustificate la vostra risposta.

Esercizio 5. Sia V uno spazio vettoriale, siano W_1, W_2 due sottospazi vettoriali di V e sia $V = W_1 \oplus W_2$ una decomposizione di V in somma diretta di W_1 e W_2. Sia $P_1 : V \to V$ la proiezione su W_1 parallelamente a W_2; sia $P_2 : V \to V$ la proiezione su W_2 parallelamente a W_1. Determinare nucleo ed immagine di queste due applicazioni lineari.

Svolgere gli esercizi 5.22, 5.25 del libro di testo.

Esercizio 6. Sia $V = W_1 \oplus W_2$ come nell'esercizio 5. Definiamo due ulteriori applicazioni:

[1] Alcuni esercizi del libro di testo hanno risposte/soluzioni alla fine del libro.

S_1, la simmetria rispetto a W_1 parallelamente a W_2;

S_2, la simmetria rispetto a W_2 parallelamente a W_1.

Per definizione, se $\underline{w}$ di V si scrive in **maniera unica** come $\underline{w} = \underline{w}_1 + \underline{w}_2$ con $\underline{w}_1 \in W_1$ e $\underline{w}_2 \in W_2$ allora

$$S_1(\underline{w}) := \underline{w}_1 - \underline{w}_2, \quad S_2(\underline{w}) := \underline{w}_2 - \underline{w}_1.$$

6.1. Verificare che S_1, S_2 sono applicazioni **lineari**.

6.2. Considerate $V = \mathbb{R}^2$, W_1 e W_2 di dimensione 1 e ovviamente distinti. Su un disegno indicate un generico vettore $\underline{w}$ di $\mathbb{R}^2$, $S_1(\underline{w})$, $S_2(\underline{w})$. Riportate anche $P_1(\underline{w})$, $P_2(\underline{w})$ dell'esercizio 5.

6.3. Torniamo al caso generale. Verificare che sussistono le identità

$$S_1 = \mathrm{Id} - 2P_2\,; \quad S_2 = 2P_2 - \mathrm{Id} \tag{1}$$

$$(S_1)^2 = \mathrm{Id}\,; \quad (S_2)^2 = \mathrm{Id} \tag{2}$$