Corso di Laurea in Fisica. a.a. 2020-21.
Geometria. Canale 3.
Compito a casa del 31/12/20

Esercizio 1. Consideriamo $\mathbb{R}^{2n}$ con la base canonica $\mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n, \underline{e}_{n+1}, \dots, \underline{e}_{2n}\}$. Sia $b : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ l'applicazione

$$b(\underline{x}, \underline{y}) = x_1 y_{n+1} + \cdots + x_n y_{2n} - x_{n+1} y_1 - \cdots - x_{2n} y_n$$

Verificare che $b(\ ,\ )$ è una forma bilineare scrivendo $b(\underline{x}, \underline{y})$ nella forma $\underline{y}^T A \underline{x}$.
Vero o falso: b è antisimmetrica e cioè $b(\underline{x}, \underline{y}) = -b(\underline{y}, \underline{x})$

Esercizio 2. Consideriamo lo spazio vettoriale metrico $(\mathbb{R}^4, \bullet)$, con $\bullet$ il prodotto scalare canonico

$$\underline{x} \bullet \underline{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 \,.$$

Fissiamo la base canonica $\mathcal{E}$.
Sia $b(\ ,\ )$ la forma bilineare simmetrica definita in coordinate da

$$b(\underline{u}, \underline{v}) = u_1 v_1 - u_2 v_2 + u_3 v_4 + u_4 v_3 \tag{1}$$

2.1. Scrivere la matrice associata a $b(\ ,\ )$ nella base canonica, $A_b^{\mathcal{E}}$.
Verificare che $b(\ ,\ )$ è non degenere.

2.2. Definire a partire da $b(\ ,\ )$ un endomorfismo simmetrico T in $(\mathbb{R}^4, \bullet)$.

2.3. Determinare indice di positività ed indice di negatività di b.

2.4. Trovare una base ortonormale di $(\mathbb{R}^4, \bullet)$ costituita da autovettori per T.

2.5. Determinare una base ortonormale di $(\mathbb{R}^4, \bullet)$ rispetto alla quale $b(\ ,\ )$ si scriva in forma diagonale. In altre parole, determinare una base ortonormale $\mathcal{H}$ di $(\mathbb{R}^4, \bullet)$ tale che $A_b^{\mathcal{H}}$ sia diagonale. Determinare una base di Sylvester e cioè una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$ tale che $A_b^{\mathcal{B}}$ sia nella forma di Sylvester.

2.6. Determinare una base $\mathcal{G}$ di $\mathbb{R}^4$ che diagonalizzi l'operatore T ma *non* diagonalizzi la forma $b(\ ,\ )$.
Suggerimento. Sicuramente dovete fissare una base $\mathcal{G}$ di autovettori per T; come andranno scelti questi autovettori per essere tali da *non* diagonalizzare $b(\ ,\ )$?

2.7. Vero o Falso: dato che b è non-degenere, non esistono vettori isotropi.

2.8. Utilizzando il concetto di vettore non-isotropo e di b-ortogonale ad un vettore non-isotropo, costruite una base $\mathcal{K} = \{\underline{k}_1, \underline{k}_2, \underline{k}_3, \underline{k}_4\}$ di $\mathbb{R}^4$ che diagonalizzi $b(\ ,\ )$.
Suggerimento. Sappiamo che il nucleo di b è banale. Cominciate quindi con il fissare un vettore non-isotropo $\underline{k}_1$; determinate poi

$$(\mathbb{R}\underline{k}_1)^{\perp_b} := \{\underline{v} \in \mathbb{R}^4 \ \mid \ b(\underline{v}, \underline{k}_1) = 0\}$$

osservando che, passando in coordinate, abbiamo facilmente un'equazione cartesiana di $(\mathbb{R}\underline{k})_1^{\perp_b}$. Scegliete $\underline{k}_2$ verificante questa equazione cartesiana. Cercate poi $\underline{k}_3$ non-isotropo che sia b-ortogonale sia a $\underline{k}_1$ che a $\underline{k}_2$....

2.9. Determinare a partire da $\mathcal{K}$ una base $\mathcal{F}$ di $\mathbb{R}^4$ tale che $A_b^{\mathcal{F}}$ sia nella forma di Sylvester.

2.10. Determinare equazioni cartesiane di due sottospazi W_+ e W_- tali che la restrizione di b a W_+ (rispettivamente W_-) sia definita positiva (risp. negativa).

Esercizio 3. Sia $(V, < , >)$ uno spazio vettoriale metrico. Fissiamo una base $\mathcal{B}$ non necessariamente ortonormale e sia $T : V \to V$ lineare. Consideriamo

$$A := M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T) \quad \text{e} \quad S := A^{\mathcal{B}}_{< \, , \, >} .$$

Dimostrare la seguente proposizione:
Proposizione. *T è un operatore simmetrico se e solo se per le matrici A ed S vale la relazione $SA = A^T S$*
Suggerimento: T è simmetrico se e solo se

$$< T\underline{v}, \underline{w} > = < \underline{v}, T\underline{w} > , \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in V. \tag{2}$$

Traducete in coordinate questa equazione.....

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}^2$ e sia $S = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

4.1 Verificare che l'applicazione $< \, , \, >: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $< \underline{x}, \underline{y} > = \underline{y}^T S \underline{x}$ è un prodotto scalare definito positivo.

4.2 Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'operatore L_A con $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$. Stabilire se T è simmetrico rispetto al prodotto scalare definito in **4.1**.