Algebra. Corso di Laurea in Informatica.
Prof. P. Piazza a.a. 2023-24.
Foglio di esercizi del 11/10/2023

Esercizio 1. Sia $(G, \bullet)$ un gruppo.
1.1. Verificate l'unicità dell'elemento neutro e (esercizio già fatto in classe, rifatelo senza guardare gli appunti !).
1.2 Verificate l'unicità dell'inverso di un elemento $g \in G$. Questo unico elemento si denota g^{-1}.
1.3 Verificate che $(g \bullet h)^{-1} = h^{-1} \bullet g^{-1}$.

Esercizio 2. Sia $f : A \to B$ una bigezione, o applicazione biunivoca, e sia $f^{-1} : B \to A$ l'inversa di f. [1] Verificare che

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B \,, \qquad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$$

dove per ogni insieme C l'applicazione id_C è l'applicazione identità, definita come $\mathrm{id}_C(c) := c$ per ogni $c \in C$.

Esercizio 3. Sia A un insieme e $G = \{f : A \to A \mid f \text{ bigezione}\}$. Sia $\circ$ la composizione fra applicazioni. Verificare in dettaglio che $(G, \circ)$ è un gruppo (visto rapidamente a lezione).

Esercizio 4. Sia ora $A = \{1, 2, \dots, n\}$.
Il gruppo G definito nell'esercizio precedente possiede allora una notazione specifica, che è $\mathcal{S}_n$, ed un nome specifico che è il *gruppo simmetrico di n oggetti*.
Scrivere tutti gli elementi del gruppo $\mathcal{S}_3$ (sono 6). Verificare che S_3 non è un gruppo commutativo.
Suggerimento: per scrivere, ad esempio, l'elemento di $\mathcal{S}_3$ che manda 1 in 3, 2 in 2 e 3 in 1 potete scrivere

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Utilizzate questa scrittura per studiare la composizione di due elementi.

Esercizio 5. Abbiamo visto la definizione rigorosa di $\mathbb{Q}$. Verificare che le operazioni definite in classe sono ben poste e che rendono $\mathbb{Q}$ un campo.

Esercizio 6. Consideriamo il campo dei numeri reali $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. Consideriamo il sottoinsieme

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{\alpha + \sqrt{2}\beta \,, \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}.$$

Verificare che le due operazioni di $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ inducono in questo insieme una struttura di anello [2]; dimostrare che $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ è un campo.

Esercizio 7. Abbiamo visto che in un anello $(A, +, \cdot)$ con elemento neutro additivo 0 si ha sempre che $a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a$. Denotiamo con $-a$ l'inverso additivo di un elemento $a \in A$. Verificare che si ha sempre:

- $a \cdot (-b) = -(a \cdot b) = (-a) \cdot b$
- $(-a) \cdot (-b) = ab$
- denotiamo brevemente $(b + (-c))$ con $b - c$; verificare che $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$

Esercizio 8. Sia A un anello unitario e sia $\mathcal{U}(A)$ l'insieme degli elementi invertibili di A:

$$\mathcal{U}(A) := \{a \in A : \exists\, a' \in A \text{ tale che } \; a \cdot a' = 1 = a' \cdot a\}$$

Dimostrate da soli, senza guardare gli appunti, che il prodotto di due element in $\mathcal{U}(A)$ è ancora in $\mathcal{U}(A)$ e che quindi la moltiplicazione in A induce in $\mathcal{U}(A)$ una struttura di gruppo (il gruppo degli invertibili di A). Suggerimento: utilizzate l'esercizio 1.3.

---

[1] Vi ricordo che $f^{-1} : B \to A$ è definita come segue: preso $b \in B$ sappiamo che esiste $a \in A$ tale che $f(a) = b$ (perché f è suriettiva); inoltre a è unico dato che f è iniettiva; riassumendo esiste unico a tale che $f(a) = b$ e si pone $f^{-1}(b) = a$.

[2] Quindi, più precisamente, la somma di due elementi di $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, visti come elementi di $\mathbb{R}$, è ancora un elemento di $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ e lo stesso è vero per il prodotto