Corso di Laurea in Informatica
Algebra. a.a. 2023-24. Proff. P. Piazza e G. Viaggi
Compito a casa dell'8/11/2023

Esercizio 1. Sia $\phi : G \to G'$ un isomorfismo. Verificare che l'applicazione inversa $\phi^{-1} : G' \to G$ è anche un isomorfismo

Esercizio 2. Sia R il rettangolo di lati $2a$ e $2b$, con $a > b$, dato da

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| \leq a, |y| \leq b\}$$

Sia G il gruppo di tutte le gigezioni di $\mathbb{R}^2$ in sé stesso, con la composizione come operazione. Consideriamo il sottoinsieme V_4 costituito dall'identità $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$, denotata semplicemente con 1, e da:
$a := R_\pi$, la rotazione di π in senso antiorario
$b := S_{\mathrm{asse}x}$, la simmetria (o ribaltamento) rispetto all'asse x
$c := S_{\mathrm{asse}y}$, la simmetria (o ribaltamento) rispetto all'asse y.
Verificate che V_4 è un sottogruppo di ordine 4 di G detto il gruppo di Klein. Scrivete la tabella moltiplicativa.
Vero o Falso: V_4 è isomorfo a $\mathbb{Z}_4$. Spiegare.

Esercizio 3. Verificare che un gruppo di ordine p, con p primo, è necessariamente ciclico.

Esercizio 4. Dimostrare che $(\mathcal{U}(\mathbb{Z}_{25}), \cdot)$ è ciclico e determinarne tutti i sottogruppi.

Esercizio 5. Consideriamo il gruppo simmetrico S_3.
Determinare il reticolo dei sottogruppi di S_3 specificando quali fra di essi sono normali.
Il Teorema di Lagrange può essere utile....

Esercizio 6. Vero o Falso: se G è commutativo allora ogni suo sottogruppo è normale.

Esercizio 7. Sia G un gruppo abeliano e si ponga

$$T(G) := \{x \,|\, x \in G, \quad \exists\, n \in \mathbb{N} \;\; x^n = 1_G\}.$$

(1) Provare che $T(G) \leq G$;
(2) Consideriamo $G/T(G)$. Dimostrare che ogni elemento di $G/T(G)$ diverso dall'identità e cioè ogni classe laterale $xT(G)$ diversa da $T(G)$, ha ordine infinito.

Sia G un gruppo. Un automorfismo di G è un isomorfismo di G in sé. È chiaro che l'insieme degli automorfismi di G, denotato $\mathrm{Aut}(G)$, è un gruppo rispetto alla composizione.

Esercizio 8. Dato $x \in G$ possiamo definire l'applicazione [1]: $\gamma_x : G \to G\,, g \to xgx^{-1}$. In formule $\gamma_x(g) := xgx^{-1}$.
Verificare che γ_x è un automorfismo di G.
Verificare che l'applicazione $G \to \mathrm{Aut}(G)$ che associa a $x \in G$ l'automorfismo γ_x è un omomorfismo di gruppi.
L'immagine di questo omomorfismo è, per definizione, il gruppo degli automorfismi interni di G, denotato $\mathrm{Int}(G)$. Esso è ovviamente un sottogruppo di $\mathrm{Aut}(G)$.

[1] In alcuni testi trovate come definizione $\gamma_x : g \to x^{-1}gx$.