Corso di Laurea in Informatica
Algebra. a.a. 2023-24. Canale 1.
Compiti a casa del 20 e del 22 /11/2023. Soluzioni.

Esercizio 1. Svolgere gli esercizi 4.1, 4.2 e 4.3 del libro.

Soluzione esercizio 4.1 del libro di testo.
Denotiamo con $\underline{0}$ il vettore nullo di V (e cioè l'elemento neutro del gruppo commutativo $(V,+)$). Dato che $0 = 0+0$ si ha sicuramente $0\underline{v} = (0+0)\underline{v}$. Per distributività otteniamo $0\underline{v} = 0\underline{v}+0\underline{v}$. Aggiungendo ad ambo i membri l'opposto di $0\underline{v}$ otteniamo $0\underline{v} - 0\underline{v} = (0\underline{v} + 0\underline{v}) - 0\underline{v}$ che ci dà, per associatività, $\underline{0} = 0\underline{v} + \underline{0}$, e quindi $\underline{0} = 0\underline{v}$ che è quello che dovevamo verificare (senza utilizzare l'assioma 7).
Molto spesso scriviamo brevemente $\underline{v} - \underline{w}$ e non $\underline{v} + (-\underline{w})$.

Soluzione esercizio 4.2 del libro di testo.
Vi ricordo che $-\underline{v}$ è l'opposto di $\underline{v}$ nel gruppo commutativo $(V,+)$. In generale, l'opposto è univocamente determinato in un gruppo commutativo $(G,+)$ e, più in generale, l'inverso è univocamente determinato in un gruppo non-commutativo $(G,\cdot)$. Verifichiamo quest'ultima affermazione. Sia e l'elemento neutro di $(G,\cdot)$. Se

$$g \cdot g' = e = g' \cdot g \quad \text{e} \quad g \cdot g'' = e = g'' \cdot g$$

allora

$$g' = g' \cdot e = g' \cdot (g \cdot g'') = (g' \cdot g) \cdot g'' = e \cdot g'' = g''$$

e quindi $g' = g''$ come volevasi dimostrare.
Torniamo all'esercizio. Per quanto appena visto l'inverso additivo di $\underline{v}$, e cioè $-\underline{v}$, è unico. Basta allora verificare che $(-1)\underline{v} + \underline{v} = \underline{0}$; ma $(-1)\underline{v} + \underline{v} = ((-1)+1)\underline{v} = 0\underline{v} = \underline{0}$ (per l'esercizio precedente).

Soluzione esercizio 4.3 del libro di testo.
Dobbiamo verificare che

$$\lambda\underline{v} = \underline{0} \iff \lambda = 0 \text{ oppure } \underline{v} = \underline{0}\,.$$

Verifichiamo che

$$\lambda = 0 \text{ oppure } \underline{v} = \underline{0} \Rightarrow \lambda\underline{v} = \underline{0}\,.$$

Se $\lambda = 0$ allora l'asserto è vero per l'assioma 7) (oppure per l'esercizio 4.1). Se $\underline{v} = \underline{0}$ allora quale che sia λ si ha per $\underline{w}$ generico

$$\lambda\underline{0} = \lambda(\underline{w}+(-\underline{w})) = \lambda\underline{w}+\lambda(-\underline{w}) = \lambda\underline{w}+\lambda((-1)\underline{w}) = \lambda\underline{w}+(\lambda(-1))\underline{w} = \lambda\underline{w}+(-\lambda\underline{w}) = \underline{0}$$

dove abbiamo utilizzato vari assiomi e l'esercizio 4.2.
Verifichiamo ora che

$$\lambda\underline{v} = \underline{0} \Rightarrow \lambda = 0 \text{ oppure } \underline{v} = \underline{0}\,.$$

Supponiamo che $\lambda\underline{v} = \underline{0}$. Se $\lambda = 0$ abbiamo finito. Se $\lambda \neq 0$ allora esiste λ^{-1} e si ha $\lambda^{-1}(\lambda\underline{v}) = \lambda\underline{0}$. Ma $\lambda\underline{0} = \underline{0}$ perché $\lambda\underline{0} = \lambda(\underline{0} + \underline{0})$, dato che $\underline{0} = \underline{0} + \underline{0}$, e quindi $\lambda\underline{0} = \lambda\underline{0} + \lambda\underline{0}$ che ci dà $\underline{0} = \lambda\underline{0}$ aggiungendo ad ambo i membri l'opposto di $\lambda\underline{0}$. Quindi siamo arrivati a concludere che

$$\lambda^{-1}(\lambda\underline{v}) = \underline{0}$$

Consideriamo il membro a sinistra: dall'assioma 6 e dall'assioma 7 si ha

$$\lambda^{-1}(\lambda\underline{v}) = (\lambda^{-1}\lambda)\underline{v} = 1\underline{v} = \underline{v}$$

e quindi $\underline{v} = \underline{0}$ che era quello che dovevamo dimostrare.

Esercizio 2. Stabilire se l'insieme $\mathbb{R}^2$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ rispetto alle operazioni:

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y'), \qquad k(x,y)=(kx,-ky), \quad \forall k\in\mathbb{R}.$$

Soluzione. Le operazioni $\{+,\cdot\}$ definite nel testo dell'esercizio non dotano $\mathbb{R}^2$ di una struttura di spazio vettoriale. Forse il modo più semplice di vederlo (ce ne sono ovviamente altri) è osservare che $1\cdot(x,y)=(x,-y)$ e dunque, in generale

$$1\cdot(x,y)\neq(x,y)$$

Non è dunque verificato l'assioma $1\cdot \underline{v}=\underline{v}$, $\forall \underline{v}\in V$.

Esercizio 3. Abbiamo visto che $\mathbb{R}[x]$, l'insieme dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{R}$, è uno spazio vettoriale.
Verificare che $\mathbb{R}_3[x]\subset\mathbb{R}[x]$, l'insieme dei polinomi di grado minore o uguale a tre, è un sottospazio di $\mathbb{R}[x]$ ed è quindi lui stesso uno spazio vettoriale (Osservazione 4.3 nel libro).
Si consideri il sottoinsieme

$$W=\{p(x)\in\mathbb{R}_3[x]\mid p(1)=0\}\subset\mathbb{R}_3[x]$$

Stabilire se W è un sottospazio. Stesso esercizio per

$$U=\{q(x)\in\mathbb{R}_3[x]\mid q(2)=4\}.$$

Soluzione esercizio 3. Se p e q hanno grado ≤ 3 allora la loro somma ha anche grado ≤ 3. Se p ha grado ≤ 3 e $\lambda\in\mathbb{R}$ allora chiaramente λp ha anche grado ≤ 3. Quindi $\mathbb{R}_3[x]$ è un sottospazio $\mathbb{R}[x]$.
Il sottoinsieme W è un sottospazio di $\mathbb{R}_3[x]$. Infatti, presi $p(x),q(x)$ in W e $\lambda\in\mathbb{R}$, si ha

$$(p+q)(1)=p(1)+q(1)=0$$
$$(\lambda p)(1)=\lambda\cdot p(1)=0$$

dunque $p(x)+q(x)\in W$ e $\lambda p(x)\in W$. Il sottoinsieme U, invece, non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}_3[x]$. Ad esempio il polinomio nullo non appartiane ad U.

Esercizio 4. Sia $V=\mathbb{R}[x]$ e sia $p(x)=1+x+x^2+5x^4$. Consideriamo $q(x)=x^2+5x^4$. Stabilire se $q(x)\in\mathrm{Span}(p)$.

Soluzione. Il polinomio $q(x)$ non appartiene a $\mathrm{Span}(p)$. Infatti se $q\in\mathrm{Span}(p)$, si avrebbe $q(x)=\lambda p(x)$ per qualche $\lambda\in\mathbb{R}$, ovvero

$$x^2+5x^4=\lambda(1+x+x^2+5x^4)$$

per qualche $\lambda\in\mathbb{R}$. Ma l'uguaglianza scritta sopra è equivalente a

$$\lambda+\lambda x+(\lambda-1)x^2+5(\lambda-1)x^4=\underline{0}$$

dove a destra c'è il **polinomio nullo**, ovvero al sistema

$$\begin{cases}\lambda=0\\ \lambda=0\\ \lambda-1=0\\ 5\lambda-5=0\end{cases}$$

che evidentemente non ha alcuna soluzione.

Esercizio 5. Una matrice $A=(a_{ij})\in M_{nn}(\mathbb{R})$ è detta *simmetrica* se $a_{ij}=a_{ji}$ per ogni i,j. Una matrice A è detta *antisimmetrica* se $a_{ij}=-a_{ji}$ per ogni i,j.

5.1. Verificare che il sottoinsieme $\mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R}) \subset M_{nn}(\mathbb{R})$ delle matrici simmetriche è un sottospazio.
5.2. Verificare che il sottoinsieme $\mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R}) \subset M_{nn}(\mathbb{R})$ delle matrici antisimmetriche è un sottospazio.

Soluzione. Siano A e B due matrici simmetriche e λ un numero reale. Dobbiamo mostrare che anche $A+B$ e λA sono matrici antisimmetriche. Ricordiamo che se A è una matrice allora $(A)_{ij}$ è il coefficiente della matrice che si trova sulla i-ma riga e la j-ma colonna.
Si ha

$$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = a_{ji} + b_{ji} = (A+B)_{ji}$$
$$(\lambda A)_{ij} = \lambda \cdot a_{ij} = \lambda \cdot a_{ji} = (\lambda A)_{ji}$$

dunque $A+B, \lambda A \in \mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R})$.

La dimostrazione per lo spazio delle matrici antisimmetriche è perfettamente analoga: se A e B sono due matrici anti simmetriche e λ un numero reale, allora

$$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = -a_{ji} - b_{ji} = -(A+B)_{ji}$$
$$(\lambda A)_{ij} = \lambda \cdot a_{ij} = -\lambda \cdot a_{ji} = -(\lambda A)_{ji}$$

dunque $A+B, \lambda A \in \mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$.

Compito a casa del 22/11/2023

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale e $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k\}$ vettori linearmente indipendenti. Verificare che se $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$, $c_j \neq 0 \ \forall j$, allora i vettori

$$c_1\underline{v}_1, \ldots, c_k\underline{v}_k$$

sono anche linearmente indipendenti.

Soluzione. Sia

$$\alpha_1(c_1\underline{v}_1) + \alpha_2(c_2\underline{v}_2) + \cdots + \alpha_k(c_k\underline{v}_k) = \underline{0}$$

Ne segue, dagli assiomi, che

$$(\alpha_1 c_1)\underline{v}_1 + (\alpha_2 c_2)\underline{v}_2 + \cdots + (\alpha_k c_k)\underline{v}_k = \underline{0}$$

Per ipotesi i vettori sono linearmente indipendenti; ne segue che

$$\alpha_j c_j = 0 \quad \forall j = 1, \ldots, k\,.$$

Ma $c_j \neq 0 \ \forall j$ e quindi deve essere $\alpha_j = 0 \ \forall j$. Ne segue la tesi.

Esercizio 2. In $M_{33}(\mathbb{R})$ consideriamo il sottospazio $\mathcal{S}_{33}(\mathbb{R})$ delle matrici simmetriche ed il sottospazio $\mathcal{A}_{33}(\mathbb{R})$ delle matrici antisimmetriche.
Determinare una base di $M_{33}(\mathbb{R})$.
Determinare una base del sottospazio $\mathcal{S}_{33}(\mathbb{R})$ e una base del sottospazio $\mathcal{A}_{33}(\mathbb{R})$.

Soluzione esercizio 2. Una base di $\mathcal{S}_{33}(\mathbb{R})$ è data dalle 6 matrici

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Infatti è subito visto che sono simmetriche e linearmente indipendenti. D'altra parte ogni matrice simmetrica

$$\begin{vmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{vmatrix}$$

è combinazione lineare di queste matrici. Ne segue che sono una base per $\mathcal{S}_{33}(\mathbb{R})$. In particolare $\dim \mathcal{S}_{33}(\mathbb{R}) = 6$.
Una base di di $\mathcal{A}_{33}(\mathbb{R})$ è invece data dalle 3 matrici

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Infatti esse sono antisimmetriche e linearmente indipendenti, come subito si verifica. Inoltre ogni matrice antisimmetrica

$$\begin{vmatrix} 0 & d & e \\ -d & 0 & f \\ -e & -f & 0 \end{vmatrix}$$

è combinazione lineare di queste tre matrici. Ne segue che sono una base per $\mathcal{A}_{33}(\mathbb{R})$. In particolare $\dim \mathcal{A}_{33}(\mathbb{R}) = 3$.

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix}, \ \underline{v}_2 = \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}, \ \underline{v}_3 = \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Verificare che questi 3 vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$.

Soluzione. Si tratta di 3 vettori in $\mathbb{R}^3$. Per mostrare che sono una base occorre mostrare che sono linearmente indipendenti e che sono un sistema di generatori per $\mathbb{R}^3$. Risolviamo entrambi i problemi studiando opportuni sistemi di equazioni lineari.
L'equazione

$$\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \alpha_3\underline{v}_3 = 0$$

è equivalemte al sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

La matrice associata al sistema è

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

Osserviamo che avremmo potuto scrivere la matrice del sistema direttamente dai vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$. Applichiamo l'algoritmo di eliminazione gaussiana alla matrice del sistema:

$$A := \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 0 \end{array}\right| \mapsto \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/5 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 0 \end{array}\right|$$

$$\mapsto \left|\begin{matrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1/5 \\ 0 & 0 & 3/5 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right|$$

Tutti i pivot sono diversi da zero. la matrice del sistema è pertanto non singolare, ed il sistema ammette un' unica soluzione. Trattandosi di un sistema omogeneo, quest'unica soluzione deve essere la soluzione banale.
Ne segue che i vettori sono linearmente indipendenti.
Dato che abbiamo verificato che la matrice A è non singolare, possiamo concludere che $\forall \underline{b} \in \mathbb{R}^3$ il sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = b_1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = b_2 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = b_3 \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione. Questo dimostra che ogni vettore $\underline{b}$ di $\mathbb{R}^3$ è combinazione lineare dei 3 vettori dati che sono quindi un sistema di generatori.
Conclusione: i tre vettori $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ sono una base di $\mathbb{R}^3$.
Osservazione. Con quello che abbiamo poi imparato sul concetto di dimensione bastava ovviamente dimostrare che $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ erano linearmente indipendenti, ma questo esercizio è stato assegnato quando avevamo appena parlato di dimensione.

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}^4$ e si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = (1,0,1,0)\,,\ \underline{v}_2 = (0,1,0,0)\,,\ \underline{v}_3 = (0,0,1,0).$$

Verificare che questi 3 vettori sono linearmente indipendenti.
Determinare una base per i seguenti sottospazi:
$W_1 = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_1 + 74\underline{v}_2 - \sqrt{2}\underline{v}_3)$
$W_2 = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$
$W_3 = \mathrm{Span}(\underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_1 - \underline{v}_2, \underline{v}_1 + 2\underline{v}_2, \underline{v}_1 - 2\underline{v}_2)$

Soluzione. Ricordiamo una utile notazione: se un sottoinsieme $W \subset V$ è un sottospazio vettoriale di V, scriviamo $W \leq V$.
Verifichiamo che i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono linearmente indipendenti: l'equazione $\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \alpha_3\underline{v}_3 = 0$ scritta per esteso è

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_3, 0) = (0,0,0,0)$$

ed ha evidentemente la sola soluzione $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0,0,0)$. Determiniamo ora una base per i sottospazi W_1, W_2 e W_3. Osserviamo che tutti i generatori di W_1 sono combinazioni lineari di $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$, dunque $W_1 \leq \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$. D'altronde i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ appartengono a W_1 e dunque $\mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3) \leq W_1$. Ne segue $W_1 = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$. Poiché i tre vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono linearmente indipendenti, essi sono una base per il sottospazio che generano, e dunque una base di W_1 è $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$. Con ragionamento perfettamente analogo si prova che $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ è una base di W_2. Infine, per quanto riguarda W_3 osserviamo che tutti i generatori di W_3 sono combinazioni lineari di $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ e dunque $W_3 \leq \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$. D'altra parte

$$\underline{v}_1 = \frac{1}{2}(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) + \frac{1}{2}(\underline{v}_1 - \underline{v}_2)$$
$$\underline{v}_2 = \frac{1}{2}(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) - \frac{1}{2}(\underline{v}_1 - \underline{v}_2)$$

e quindi $\mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2) \leq W_3$. Ne segue che $\mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = W_3$ e quindi una base di W_3 è costituita da $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$.

Esercizio 5. Vero o Falso :

- 4 vettori non-nulli in $\mathbb{R}^6$ sono sempre linearmente dipendenti
- 6 vettori non-nulli in $\mathbb{R}^4$ sono sempre linearmente dipendenti.
- 4 vettori non-nulli in $\mathbb{R}^6$ sono sempre linearmente indipendenti

Giustificare le risposte.

Soluzione. La prima affermazione è falsa. Per dimostrarlo dobbiamo mostrare che in $\mathbb{R}^6$ è possibile trovare quattro vettori linearmente indipendenti. Un modo è il seguente.
Sappiamo che $\mathbb{R}^6$ ha dimensione 6. Una sua base $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4, \underline{b}_5, \underline{b}_6\}$ è costituita da 6 vettori linearmente indipendenti tra loro. Ma allora, in particolare i 4 vettori $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4\}$ sono linearmente indipendenti. Possiamo scegliere, ad esempio, la base canonica.

La seconda affermazione è vera. Se avessimo in $\mathbb{R}^4$ sei vettori linearmente indipendenti, allora la dimensione di $\mathbb{R}^4$ sarebbe almeno 6, ma sappiamo che la dimensione di $\mathbb{R}^4$ è uguale a 4.

Infine, l'ultima affermazione è falsa. Per fornire un controesempio basta prendere tre vettori a piacere in $\mathbb{R}^6$ e scegliere come quarto vettore una combinazione lineare dei primi tre.