Corso di Laurea in Informatica
Algebra. a.a. 2023-24. Canale 1.
Compito a casa del 22/11/2023

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale e $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k\}$ vettori linearmente indipendenti. Verificare che se $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$, $c_j \neq 0\ \forall j$, allora i vettori

$$c_1\underline{v}_1, \ldots, c_k\underline{v}_k$$

sono anche linearmente indipendenti.

Esercizio 2. In $M_{33}(\mathbb{R})$ consideriamo il sottospazio $\mathcal{S}_{33}(\mathbb{R})$ delle matrici simmetriche ed il sottospazio $\mathcal{A}_{33}(\mathbb{R})$ delle matrici antisimmetriche.
Determinare una base di $M_{33}(\mathbb{R})$.
Determinare una base del sottospazio $\mathcal{S}_{33}(\mathbb{R})$ e una base del sottospazio $\mathcal{A}_{33}(\mathbb{R})$.

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix}, \ \underline{v}_2 = \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}, \ \underline{v}_3 = \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Verificare che questi 3 vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$.
Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}^4$ e si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = (1, 0, 1, 0)\,,\ \underline{v}_2 = (0, 1, 0, 0)\,,\ \underline{v}_3 = (0, 0, 1, 0).$$

Verificare che questi 3 vettori sono linearmente indipendenti.
Determinare una base per i seguenti sottospazi:
$W_1 = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_1 + 74\underline{v}_2 - \sqrt{2}\underline{v}_3)$
$W_2 = \mathrm{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$
$W_3 = \mathrm{Span}(\underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_1 - \underline{v}_2, \underline{v}_1 + 2\underline{v}_2, \underline{v}_1 - 2\underline{v}_2)$

Esercizio 5. Vero o Falso :

- 4 vettori non-nulli in $\mathbb{R}^6$ sono sempre linearmente dipendenti
- 6 vettori non-nulli in $\mathbb{R}^4$ sono sempre linearmente dipendenti.
- 4 vettori non-nulli in $\mathbb{R}^6$ sono sempre linearmente indipendenti

Giustificare le risposte.