Corso di Laurea in Informatica
Algebra. a.a. 2023-24. Canale 1.
Soluzioni degli esercizi del compito a casa del 27/11/2023
e del 29/11/2023

Esercizio 1. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix}, \ \underline{v}_2 = \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}, \ \underline{v}_3 = \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Abbiamo visto nel compito del 20/11 che questi 3 vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$. Determinare le coordinate del vettore $\underline{e}_2 = (0, 1, 0)$ in questa nuova base di $\mathbb{R}^3$.
Soluzione. Sappiamo, dalla soluzione data in un esercizio del 20/11 che il sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = b_1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = b_2 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = b_3 \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione per ogni fissato $\underline{b}$ di $\mathbb{R}^3$.
Determinare le coordinate del vettore $\underline{e}_2$ nella base $\underline{v}_1, \underline{v}_2\underline{v}_3$ significa determinare i tre numeri reali $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ per i quali risulta

$$\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \alpha_3\underline{v}_3 = \underline{e}_2$$

Arriviamo così al sistema lineare non omogeneo

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 1 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

La matrice associata al sistema è

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

Osserviamo che anche in questo caso avremmo potuto scrivere la matrice del sistema direttamente dai vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ ed $\underline{e}_2$. Applicando l'algoritmo di eliminazione gaussiana alla matrice del sistema troviamo la soluzione $(-1/3, -2/3, -7/3)$; vale a dire

$$\underline{e}_2 = -\frac{1}{3}\underline{v}_1 - \frac{2}{3}\underline{v}_2 - \frac{7}{3}\underline{v}_3$$

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e si consideri il sottoinsieme

$$W := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

Verificare che W è un sottospazio, trovarne la dimensione e determinarne una base.
Soluzione. W è l'insieme delle soluzioni di *una equazione lineare omogenea in tre variabili* e quindi per quanto visto a lezione è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$. È un sottospazio proprio di $\mathbb{R}^3$ perché, ad esempio, $(1, 1, 1)$ non appartiene a W (infatti non soddisfa l'equazione). Quindi $\dim W \leq 2$. D'altra parte i vettori $\underline{v}_1 = (1, 0, -1)$ e $\underline{v}_2 = (0, 1, -1)$ appartengono a W, perché soddisfano l'equazione che definisce W, e sono non-proporzionali, quindi linearmente indipendenti. Ne segue che $\dim W \geq 2$ e quindi, mettendo tutto insieme

$$\dim W = 2.$$

Una base di W è proprio data da $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$.
Esercizio 3. Consideriamo $\mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R})$ e $\mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$ i sottospazi di $M_{nn}(\mathbb{R})$ costituiti rispettivamente dalle matrici simmetriche e antisimmetriche.
Dimostrare che

$$M_{nn}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$$

Suggerimento: per dimostrare che $M_{nn}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$ osservate che se $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ allora $A = \frac{A+A^t}{2} + \frac{A-A^t}{2}$.

Soluzione. In generale possiamo scrivere

$$M_{nn}(\mathbb{R}) \ni A = \frac{A + A^t}{2} + \frac{A - A^t}{2}$$

Ricordando che $(A^t)^t = A$ vediamo che il primo addendo a destra è una matrice simmetrica, mentre il secondo addendo a destra è una matrice antisimmetrica. Quindi $M_{nn}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$. Rimane quindi da vedere che $\mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R}) = \underline{0}$. Ma se $A \in \mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$ allora $a_{ij} = a_{ji}$ perché $A \in \mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R})$ e $a_{ij} = -a_{ji}$ perché $A \in \mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$. Per un numero reale α si ha che $\alpha = -\alpha$ se e solo se $\alpha = 0$. Quindi A è la matrice nulla.

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}^3$. Consideriamo i sottospazi

$$U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 - x_2 - x_3 = 0\}\,, \quad W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}.$$

Decidere se $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$. Decidere se $U + W = \mathbb{R}^3$.

Soluzione. Il sottospazio U è un sottoinsieme proprio di $\mathbb{R}^3$ e quindi $\dim U < 3$. I vettori $(1, 0, 1)$ e $(1, 1, 0)$ appartengono ad U e sono linearmente indipendenti perché non proporzionali. Quindi $\dim U \geq 2$. Ne segue che $\dim U = 2$. Analogamente $\dim W = 2$. L'intersezione di U e di W è costituita dai vettori $\underline{x}$ di $\mathbb{R}^3$ che soddisfano sia $x_1 - x_2 - x_3 = 0$ che $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$; $U \cap W$ è quindi uguale al sottospazio delle soluzioni del sistema omogeneo

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right. \tag{1}$$

Possiamo risolvere esplicitamente il sistema (è un sistema non-quadrato ma non è difficile risolverlo [1] troviamo che $U \cap W = \mathrm{Span}((1/3, -2/3, 1)) = \mathrm{Span}((1, -2, 3))$.

In particolare $\dim(U \cap W) = 1$. Ne segue, dalla formula di Grassmann, che $U + W$ ha dimensione uguale a $2 + 2 - 1 = 3$. Ma un sottospazio di dimensione 3 di $\mathbb{R}^3$ è necessariamente uguale ad $\mathbb{R}^3$. Quindi $\mathbb{R}^3 = U + W$; tuttavia, $\mathbb{R}^3$ **non** è somma diretta di questi sottospazi perché la lora intersezione non è uguale al vettore nullo.
Potevamo vedere che $\mathbb{R}^3 = U + W$ anche senza utilizzare la formula di Grassmann; si veda l'ultima parte della soluzione del prossimo esercizio.

Esercizio 5. Consideriamo i sottospazi $U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$ e $W = \mathrm{Span}((1, 1, 1))$. Decidere se $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.

Soluzione. Sappiamo che U ha dimensione 2. È ovvio che W ha dimensione 1. Inoltre $W = \{(\alpha, \alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$. Ma allora è subito visto che $U \cap W = \{\underline{0}\}$ (perché

[1] ad esempio, possiamo portare x_3 a destra delle due uguaglianze e considerarlo come un parametro, ponendo quindi $x_3 = s$. Poi risolviamo con Gauss il sistema in x_1, x_2 con termine noto dato da $\begin{vmatrix} s \\ -s \end{vmatrix}$

(α, α, α) soddisfa l'equazione che definisce U se e solo se $\alpha = 0$). Ne segue che $\dim(U \cap W) = 0$. Ma allora, per Grassmann, $\dim(U + W) = 2 + 1 - 0 = 3$. Ne segue che $U + W$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ e $\dim(U + W) = 3$; ma allora $U + W = \mathbb{R}^3$. Conclusione: in questo caso $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$ perché $U + W = \mathbb{R}^3$ e $U \cap W = \{\underline{0}\}$.
Per vedere che $\dim(U + W) = 3$, senza utilizzare Grassmann , potevamo anche ragionare come segue:
dato che $\dim U = 2$ si ha che U ha base costituita da 2 vettori linearmente indipendenti, cioè non-proporzionali, siano essi $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$; ma allora i tre vettori di $U + V$ $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, (1, 1, 1)\}$ sono linearmente indipendenti; infatti se

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \alpha_3 (1, 1, 1) = \underline{0}$$

allora deve essere $\alpha_3 = 0$ perché altrimenti $(1, 1, 1)$ sarebbe il vettore nullo (il che non è) oppure una combinazione lineare di $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ il che non è perché $(1, 1, 1) \notin U$. Quindi $\alpha_3 = 0$; ma allora anche $\alpha_1 = 0 = \alpha_2$ perché $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ sono linearmente indipendenti; quindi $\dim(U + W) \geq 3$ e dato che $U + W \leq \mathbb{R}^3$ ne deduciamo che $\dim(U + W) = 3$ e $U + W = \mathbb{R}^3$.

Esercizio 6. Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio $W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_3 + x_4 = 0\}$.
6.1. Determinando una base di W, verificare che $\dim W = 3$.
6.2. Determinare un supplementare di W (e cioè un sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ tale che $W \oplus U = \mathbb{R}^4$; determinare U vuol dire qui dare U tramite una sua base.)
Determinare un secondo supplementare di W, U', distinto da U.
Suggerimento per 6.2: Che dimensione ci aspettiamo per U?

Soluzione. Ragionando come nell'esercizio 4 capiamo che $\dim W \leq 3$, perché W è un sottospazio proprio di $\mathbb{R}^4$. È anche chiaro che $\dim W \geq 2$ perché i vettori $(0, 1, 0, 0)$ e $(1, 0 - 1, 0)$ sono linearmente indipendenti (perché non proporzionali) ed appartengono a W. È facile vedere che

$$(0, 1, 0, 0)\,, \quad (1, 0 - 1, 0)\,, \quad (0, 0, 1, -1)$$

sono 3 vettori linearmente indipendenti di W e quindi $\dim W = 3$; infatti se

$$\alpha_1(0, 1, 0, 0) + \alpha_2(1, 0 - 1, 0) + \alpha_3(0, 0, 1, -1) = \underline{0}$$

allora

$$\begin{cases} \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ -\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

da cui, ovviamente, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Quindi W ha dimensione 3. Sia $\underline{u}$ un vettore di $\mathbb{R}^4$ non appartenente a W; basta prendere un vettore che non soddisfa l'equazione che definisce W, ad esempio $\underline{u} = (1, 1, 1, 1)$. Allora $\mathrm{Span}(\underline{u}) = \{(\alpha, \alpha, \alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$ ha dimensione 1 ed è subito visto che ha intersezione banale con W: $U \cap W = \{\underline{0}\}$. Per Grassmann $\dim(U + W) = 3 + 1 - 0 = 4$; ma allora $U + W = \mathbb{R}^4$. Conclusione $\mathbb{R}^4 = W \oplus U$. Se scegliamo $U' = \mathrm{Span}(\underline{u}')$ con $\underline{u}' \notin W$ e $\underline{u}' \neq \underline{u}$ allora $\mathbb{R}^4 = W \oplus U'$ ma $U \neq U'$. Ad esempio: $\underline{u}' = (3, 2, 2, 1)$.
Anche in questo caso non era necessario utilizzare la formula di Grassmann; bastava ragionare come nell'esercizio precedente.

Preambolo all'esercizio 7. Se U è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ dato come insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$ e se W è un secondo sottospazio di $\mathbb{R}^n$ dato come insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo $B\underline{x} = \underline{0}$, allora $U \cap W$, che sappiamo essere un sottospazio, è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo $C\underline{x} = \underline{0}$ con $C = \begin{vmatrix} A \\ B \end{vmatrix}$.

Esercizio 7. In $\mathbb{R}^4$ sono dati $U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\underline{x} = \underline{0}\}$, $W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid B\underline{x} = \underline{0}\}$ con $A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. Stabilire se $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

Soluzione esercizio 7. L'intersezione dei due sottospazi è data dai vettori $\underline{x}$ di $\mathbb{R}^4$ tali che $C\underline{x} = \underline{0}$, con C uguale alla matrice 4×4 ottenuta considerando $\begin{vmatrix} A \\ B \end{vmatrix}$. Applicando Gauss vediamo che C è non-singolare e quindi l'unica soluzione del sistema omogeneo $C\underline{x} = \underline{0}$ è la soluzione banale $\underline{0}$. Ne segue che $U \cap W = \{\underline{0}\}$. Per Grassmann

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W.$$

Ma $\dim U \geq 2$ perché

$$U = \{\underline{x} \mid \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 + 4x_4 = 0 \end{cases} \}$$

e i vettori

$$(1, 0, 2, 0)\,, \quad (0, 1, -1, \frac{1}{4})$$

appartengono a U e sono non-proporzionali. Analogamente $\dim W \geq 2$. Ne segue che deve essere $\dim(U+W) = 4$ (non può certo essere maggiore di 4 dato che siamo in $\mathbb{R}^4$) da cui $U + W = \mathbb{R}^4$. Ne segue che $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.
Anche in questo caso potevate vedere che $\dim(U + W) = 4$ senza utilizzare Grassmann; bastava fissare 2 vettori non proporzionali in U (lo abbiamo già fatto) e due vettori non proporzionali in W e verificare che, insieme, erano linearmente indipendenti.

Esercizio 8. Consideriamo l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita dalla matrice

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Scrivere l'espressione di L_A: $L_A \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \ldots.$ Determinare l'immagine tramite L_A del vettore $(1, 2, 1)$. Determinare l'immagine tramite L_A dei vettori della base canonica. Stabilire se L_A è iniettiva.

Soluzione.

$$L_A \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + 3x_2 - x_3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_1 - x_2 \end{vmatrix}$$

L_A è iniettiva se e solo se $\mathrm{Ker}L_A = \{\underline{0}\}$. Occorre allora calcolare

$$\mathrm{Ker}L_A = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid L_A\underline{x} = \underline{0}\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \}$$

Utilizzando Gauss è facile vedere che $\mathrm{Ker}L_A = \{\underline{0}\}$. Ne segue che L_A è iniettiva.

Esercizio 2 del 29/11. Sia $L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla matrice

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Scrivere l'espressione di L_A, $L_A \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \ldots$. Determinare la dimensione del nucleo di L_A. Determinare una base per lo spazio immagine.

Soluzione esercizio 2 del 29/11.

$$L_A \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_1 - 3x_3 \\ -2x_2 + 5x_3 \end{vmatrix}$$

Per determinare la dimensione del nucleo troviamo prima una base per lo spazio immagine (in ogni caso questo è un quesito al quale dobbiamo rispondere). Dobbiamo quindi determinare una base per lo spazio generato dalle colonne di A; il numero di elementi in questa base è per definizione la dimensione di $\operatorname{Im} L_A$ e si ha $\dim \operatorname{Ker} A = 3 - \dim \operatorname{Im} L_A \equiv 3 - \operatorname{rg} A$. Ora, le prime due colonne sono ovviamente linearmente indipendenti perché non-proporzionali. Dobbiamo quindi decidere se tutte e tre le colonne sono o meno linearmente indipendenti. Questo lo sappiamo fare perché il problema si riduce ad un sistema di 3 equazioni nelle incognite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; si scopre che il sistema ha soluzioni non banali e quindi i 3 vettori non sono linearmente indipendenti. Ne segue che una base di $\operatorname{Im} L_A$ è costituita dalle prime due colonne. In particolare $\dim \operatorname{Im} L_A = 2$ e $\dim \operatorname{Ker} L_A = 3 - 2 = 1$.

Esercizio 3 del 29/11. Spiegare perché esiste ed è unica l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$F(1,1,1) = (2,3,2), \quad F(0,1,1) = (1,3,2), \quad F(0,1,-1) = (1,1,-2).$$

(Per ragioni tipografiche scriveremo spesso i vettori di $\mathbb{R}^n$ per righe.) Determinare l'immagine tramite F degli elementi della base canonica: $\underline{e}_1 = (1,0,0)$, $\underline{e}_2 = (0,1,0)$, $\underline{e}_3 = (0,0,1)$. (*Suggerimento*: esprimere i vettori della base canonica come combinazioni lineari dei vettori $(1,1,1)$, $(0,1,1)$, $(0,1,-1)$ e applicare la linearità.)

Soluzione esercizio 3 del 29/11. Basta verificare che i vettori

$$\underline{v}_1 = (1,1,1), \quad \underline{v}_2 = (0,1,1), \quad \underline{v}_3(0,1,-1)$$

sono una base di $\mathbb{R}^3$ perché allora possiamo applicare la Proposizione 5.2 del libro di Abate-de Fabritiis. Si verifica con il solito metodo già visto varie volte che i tre vettori sono linearmente indipendenti. Sono quindi una base in $\mathbb{R}^3$.

Per determinare $F(1,0,0)$, $F(0,1,0)$, $F(0,0,1)$ dobbiamo espimere i vettori $(1,0,0), (0,1,0)$ e $(0,0,1)$ in funzione di $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e $\underline{v}_3$ e poi applicare la linearità. Si ha $(1,0,0) = \underline{v}_1 - \underline{v}_2$, $(0,1,0) = \frac{1}{2}(\underline{v}_2 + \underline{v}_3)$, $(0,0,1) = \frac{1}{2}(\underline{v}_2 - \underline{v}_3)$ e quindi

$$F(1,0,0) = F(\underline{v}_1 - \underline{v}_2) = F(\underline{v}_1) - F(\underline{v}_2) = (2,3,2) - (1,3,2) = (1,0,0)$$

$$F(0,1,0) = F(\frac{1}{2}(\underline{v}_2 + \underline{v}_3)) = \frac{1}{2}((1,3,2) + (1,1,-2)) = (1,2,0)$$

$$F(0,0,1) = F(\frac{1}{2}(\underline{v}_2 \underline{v}_3)) = \frac{1}{2}((1,3,2) - (1,1,-2)) = (0,1,2)$$

A questo punto possiamo scrivere anche l'espressione di F su una tripla $\underline{x}$.

$$F\underline{x} = F(x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2 + x_3\underline{e}_3) = x_1F(\underline{e}_1) + x_2F(\underline{e}_2) + x_3F(\underline{e}_3)$$
$$= x_1(1,0,0) + x_2(1,2,0) + x_3(0,1,2) = (x_1 + x_2, 2x_2 + x_3, 2x_3).$$

Esercizio 4 del 29/11. Siano V e W due spazi vettoriali e $T : V \to W$ un'applicazione lineare. Sia $n = \dim V$ e $m = \dim W$.
4.1 Stabilire se la seguente proposizione è vera o falsa:
se $n > m$ l'applicazione lineare T non può essere iniettiva.
4.2. Stabilire se la seguente proposizione è vera o falsa:
se $n < m$ l'applicazione lineare T non può essere suriettiva.
Giustificate la vostra risposta.

Soluzione esercizio 4 del 29/11. Per ipotesi $n = \dim V$ e $m = \dim W$.
La **4.1** è vera, infatti, per il teorema della dimensione $\dim \mathrm{Ker}T = n - \dim \mathrm{Im}T$. Dato che $\mathrm{Im}T \subset W$, si ha $\dim \mathrm{Im}T \leq m$; per ipotesi $n - m > 0$, e quindi $n - \dim \mathrm{Im}T > 0$. Conclusione: $\dim \mathrm{Ker}T > 0$ e T non può essere iniettiva. La **4.2** è anche vera, infatti, sempre per il teorema della dimensione $\dim \mathrm{Im}\, T = n - \dim \mathrm{Ker}T$. Dato che $\dim \mathrm{Ker}T \geq 0$ si ha che $\dim \mathrm{Im}\, T \leq n$ ed essendo per ipotesi $n < m$ ne segue che $\dim \mathrm{Im}\, T < m$ e quindi T non può essere suriettiva.