Corso di Laurea in Informatica
Algebra. a.a. 2023-24. Canale 1.
Compito a casa del 27/11/2023

Esercizio 3. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{vmatrix}, \ \underline{v}_2 = \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}, \ \underline{v}_3 = \begin{vmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Abbiamo visto nel compito del 20/11 che questi 3 vettori formano una base di $\mathbb{R}^3$. Determinare le coordinate del vettore $\underline{e}_2 = (0, 1, 0)$ in questa nuova base di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}^3$ e si consideri il sottoinsieme

$$W := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$$

Verificare che W è un sottospazio, trovarne la dimensione e determinarne una base.

Esercizio 3. Consideriamo $\mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R})$ e $\mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$ i sottospazi di $M_{nn}(\mathbb{R})$ costituiti rispettivamente dalle matrici simmetriche e antisimmetriche.
Dimostrare che

$$M_{nn}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$$

Suggerimento: per dimostrare che $M_{nn}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_{nn}(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_{nn}(\mathbb{R})$ osservate che se $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ allora $A = \frac{A+A^t}{2} + \frac{A-A^t}{2}$.

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}^3$. Consideriamo i sottospazi

$$U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 - x_2 - x_3 = 0\}, \quad W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}.$$

Decidere se $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$. Decidere se $U + W = \mathbb{R}^3$.

Esercizio 5. Consideriamo i sottospazi $U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$ e $W = \mathrm{Span}((1, 1, 1))$. Decidere se $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$.

Esercizio 6. Sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio $W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 + x_3 + x_4 = 0\}$.
6.1. Determinando una base di W, verificare che $\dim W = 3$.
6.2. Determinare un supplementare di W (e cioè un sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ tale che $W \oplus U = \mathbb{R}^4$; determinare U vuol dire qui dare U tramite una sua base.)
Determinare un secondo supplementare di W, U', distinto da U.
Suggerimento per 6.2: Che dimensione ci aspettiamo per U?

Preambolo all'esercizio 7. Se U è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ dato come insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$ e se W è un secondo sottospazio di $\mathbb{R}^n$ dato come insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo $B\underline{x} = \underline{0}$, allora $U \cap W$, che sappiamo essere un sottospazio, è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo $C\underline{x} = \underline{0}$ con $C = \begin{vmatrix} A \\ B \end{vmatrix}$.

Esercizio 7. In $\mathbb{R}^4$ sono dati $U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \,|\, A\underline{x} = \underline{0}\}$, $W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \,|\, B\underline{x} = \underline{0}\}$ con $A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$, $\ B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. Stabilire se $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

Esercizio 8. Consideriamo l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita dalla matrice

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Scrivere l'espressione di L_A: $L_A \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \dots$. Determinare l'immagine tramite L_A del vettore $(1, 2, 1)$. Determinare l'immagine tramite L_A dei vettori della base canonica. Stabilire se L_A è iniettiva.

Svolgere gli esercizi 5.2, 5.3, 5.7, 5.8 del libro di testo. [1]

[1] Alcuni esercizi del libro di testo hanno risposte/soluzioni alla fine del libro.