Corso di Laurea in Informatica
Algebra. a.a. 2023-24. Canale 1.

Compito a casa del 4/12/2023. Soluzioni.

Esercizio 1. Si consideri il sistema omogeneo di 3 equazioni in 6 incognite

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_3 - 2x_4 + x_5 + x_6 = 0 \\ x_5 - x_6 = 0 \end{cases}$$

Osserviamo che trattasi di un sistema omogeneo a scala $S\underline{x} = \underline{0}$.
Determinare i pivots della matrice S. Determinare le variabili dipendenti del sistema e quelle libere. Risolvere il sistema. Sia Σ_0 l'insieme delle soluzioni. Spiegare perché Σ_0 è un sottospazio di $\mathbb{R}^6$. Determinare $k \in \mathbb{N}$ e k vettori linearmente indipendenti $\{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k\}$ in $\mathbb{R}^6$ in modo tale che

$$\Sigma_0 = \mathrm{Span}(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k)$$

Determinare il rango di S. Determinare una base per $\mathrm{Im}\, S$.

Soluzione esercizio 1. La matrice dei coefficienti del sistema è

$$S = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \end{vmatrix}$$

I pivot compaiono nella matrice in grassetto e sono:
$p_1 = 1$ nella colonna $j_1 = 1$
$p_2 = 1$ nella colonna $j_2 = 3$
$p_3 = 1$ nella colonna $j_3 = 5$.
Le variabili dipendenti sono quindi x_1, x_3, x_5. La variabili libere sono x_2, x_4, x_6.
Da quanto visto a lezione il rango di S è 3 ed una base per $\mathrm{Im}\, S$ è costituita dalle colonne $S^{j_1}, S^{j_2}, S^{j_3}$, cioè dalle colonne S^1, S^3, S^5 .
Risolvendo all'indietro abbiamo

$$\begin{cases} x_1 = x_2 - x_4 + 2x_6 \\ x_3 = 2x_4 - 2x_6 \\ x_5 = x_6 \end{cases}$$

che possiamo riscrivere come

$$\begin{cases} x_1 = x_2 - x_4 + 2x_6 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 2x_4 - 2x_6 \\ x_4 = x_4 \\ x_5 = x_6 \\ x_6 = x_6 \end{cases}$$

Quindi se Σ_0 denota l'insieme delle soluzioni, e cioè $\mathrm{Ker} L_S \equiv \mathrm{Ker} S$, si avrà

$$\underline{x} \in \Sigma_0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_4 + 2x_6 \\ x_2 \\ 2x_4 - 2x_6 \\ x_4 \\ x_6 \\ x_6 \end{vmatrix} = x_2 \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + x_4 \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + x_6 \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Conclusione:

$$\Sigma_0 \equiv \mathrm{Ker}S = \mathrm{Span}\left(\left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right| \right).$$

Dato che $\dim \mathrm{Ker}S = 6 - \mathrm{rg}S = 6 - 3 = 3$ si ha subito che questi vettori sono una base di $\mathrm{Ker}S$ e cioè di Σ_0.

Esercizio 2. Si consideri il sistema di 3 equazioni in 6 incognite

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ x_3 - 2x_4 + x_5 + x_6 = 2 \\ x_5 - x_6 = 1 \end{cases}$$

Stabilire se il sistema è compatibile ed in caso affermativo determinare l'insieme Σ delle sue soluzioni.

Soluzione esercizio 2. Da quanto visto nell'Esercizio 1 e dal Corollario 6.2 vediamo che il sistema è compatibile. Risolvendo all'indietro abbiamo

$$\begin{cases} x_1 = x_2 - x_4 + 2x_6 - 1 \\ x_3 = 2x_4 - 2x_6 + 1 \\ x_5 = 1 + x_6 \end{cases}$$

che possiamo riscrivere come

$$\begin{cases} x_1 = x_2 - x_4 + 2x_6 - 1 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 2x_4 - 2x_6 + 1 \\ x_4 = x_4 \\ x_5 = x_6 + 1 \\ x_6 = x_6 \end{cases}$$

Quindi se Σ_0 denota l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato, e cioè il sistema dell'esercizio 1, se Σ denota l'insieme delle soluzioni di questo sistema e $\underline{\nu} = (-1, 0, 1, 0, 1, 0)^t$ allora

$$\Sigma = \underline{\nu} + \Sigma_0 \,.$$

Notare che abbiamo verificato in questo esempio particolare il teorema di struttura: le soluzioni di un sistema non omogeneo sono date da una soluzione particolare più tutte le soluzioni del sistema omogeneo associato.

Esercizio 3. Si consideri il sistema di 3 equazioni in 6 incognite

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 3x_5 - x_6 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 - 2x_6 = 2 \end{cases}$$

Stabilire se il sistema è compatibile ed in caso affermativo determinare l'insieme Σ delle sue soluzioni.

Soluzione esercizio 3. Con la sostituzione

$$A_2' \to A_2' - 2A_1' \,, \quad A_3' \to A_3' - A_1'$$

nella matrice completa A' del sistema otteniamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ x_3 - 2x_4 + x_5 + x_6 = 2 \\ x_5 - x_6 = 1 \end{cases}$$

Ma questo sistema lo abbiamo già risolto nell 'esercizio precedente.