Corso di Laurea in Informatica
Algebra. a.a. 2023-24. Canale 1.

Compito in classe del 6/12/2023. Soluzioni.

Esercizio 1. Si consideri il sistema *omogeneo* di 4 equazioni in 5 incognite

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_3 - x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

Sia Σ_0 l'insieme delle soluzioni.
Determinare una matrice A tale che $\Sigma_0 = \mathrm{Ker} L_A$ (molto facile).
Applicare il metodo di Gauss e determinare un sistema omogeneo *a scala*, $S\underline{x} = \underline{0}$, equivalente al sistema dato.
Determinare una base per $\mathrm{Im} L_S \equiv \mathrm{Im} S$.
Determinare una base di Σ_0: più precisamente determinare $\ell \in \mathbb{N}$ e vettori $\{\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_\ell\}$ in $\mathbb{R}^5$ linearmente indipendenti tali che $\Sigma_0 = \mathrm{Span}(\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_\ell)$.
Determinare una base per il $\mathrm{Im} L_A \equiv \mathrm{Im} A$.

Soluzione esercizio 1. La matrice dei coefficienti del sistema è

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Σ_0 è per definizione il sottospazio $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^5 \mid A\underline{x} = \underline{0}\}$; ma questo è proprio $\mathrm{Ker} L_A$ perché per definizione

$$L_A \underline{x} = \begin{vmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 \\ x_1 - x_2 + x_4 + x_5 \\ x_1 - x_3 - x_5 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_5 \end{vmatrix}$$

(Con un piccolo abuso di notazione, scriviamo spesso $\mathrm{Ker} A$ invece di $\mathrm{Ker} L_A$.)
Applicando il metodo di Gauss sappiamo che il sistema omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$ è equivalente al sistema $S\underline{x} = \underline{0}$ con

$$S = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 1/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

I pivots di questa matrice a scala sono $p_1 = 1$ nella colonna $j_1 = 1$, $p_2 = 1$ nella colonna $j_2 = 2$ e $p_3 = 2$ nella colonna $j_3 = 3$. Da quanto visto a lezione il rango di S è 3 ed una base per $\mathrm{Im}\, S$ è costituita dalle colonne $S^{j_1}, S^{j_2}, S^{j_3}$, cioè dalle colonne S^1, S^2, S^3 . Inoltre, per il teorema fondamentale visto nell'ultima lezione:

(i) $\mathrm{Ker} A = \mathrm{Ker} S$ (equivalentemente, il sistema $A\underline{x} = \underline{0}$ è equivalente a $S\underline{x} = \underline{0}$)
(ii) $\mathrm{rg} A = \mathrm{rg} S\ (= 3)$
(iii) le colonne $A^{j_1}, A^{j_2}, A^{j_3}$, cioè le colonne A^1, A^2, A^3, costituiscono una base per $\mathrm{Im}\, A$.

Inoltre,
(iv) $\dim \mathrm{Ker} A$= 5-3=2

Tornando all'esercizio: $\Sigma_0 = \mathrm{Ker}A$ è ottenuto trovando $\mathrm{Ker}S$ che è l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \mathbf{x_1} + \mathbf{x_2} + 2\mathbf{x_3} + x_5 = 0 \\ \mathbf{x_2} + \mathbf{x_3} - \frac{1}{2}x_4 = 0 \\ 2\mathbf{x_3} + \frac{1}{2}x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

con variabili dipendenti $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3}$ e variabili libere x_4 e x_5. (Da ora in poi tralascerò la notazione in grassetto.) Risolvendo all'indietro il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -x_5 \\ x_2 + x_3 = \frac{1}{2}x_4 \\ 2x_3 = -\frac{1}{2}x_4 - 2x_5 \end{cases}$$

otteniamo (controllate i conti)

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{4}x_4 \\ x_2 = \frac{3}{4}x_4 + x_5 \\ x_3 = -\frac{1}{4}x_4 - x_5 \end{cases}$$

che è ovviamente equivalente a

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{4}x_4 \\ x_2 = \frac{3}{4}x_4 + x_5 \\ x_3 = -\frac{1}{4}x_4 - x_5 \\ x_4 = x_4 \\ x_5 = x_5 \end{cases}$$

(A lezione abbiamo posto $x_4 = t_1$ e $x_5 = t_2$ ma qui seguo il libro di testo e non faccio questa sostituzione.)
Quindi

$$\mathrm{Ker}S = \left\{ \begin{vmatrix} -\frac{1}{4}x_4 \\ \frac{3}{4}x_4 + x_5 \\ -\frac{1}{4}x_4 - x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{vmatrix} \;,\; x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \frac{x_4}{4} \begin{vmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{vmatrix} + x_5 \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \;,\; x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

Conclusione:

$$\Sigma_0 = \mathrm{Ker}A = \mathrm{Ker}S = \mathrm{Span}((-1, 3, -1, 4, 0), (0, 1, -1, 0, 1))$$

ed è chiaro che questi due vettori sono una base per Σ_0 perché sappiamo che $\mathrm{Ker}A$ ha dimensione 2 e questi vettori sono linearmente indipendenti.

Esercizio 2. Si consideri il sistema non-omogeneo di 4 equazioni in 5 incognite (ottenuto dal sistema omogeneo dell'esercizio precedente)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 - x_3 - x_5 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_5 = 1 \end{cases}$$

2.0 Applicare il metodo di Gauss e determinare un sistema *a scala*, $S\underline{x} = \underline{c}$, equivalente al sistema dato.
2.1 Verificare che il sistema a scala $S\underline{x} = \underline{c}$ è compatibile. (Otteniamo quindi la compatibiltà del sistema iniziale.)

2.2 Sia Σ l'insieme delle soluzioni del sistema iniziale. Scrivere Σ nella forma

$$\Sigma = \mathrm{Span}(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_\ell) + \underline{v}_0$$

per un opportuno $\ell \in \mathbb{N}$ e per opportuni vettori $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_\ell, \underline{v}_0$ in $\mathbb{R}^5$, con $\{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_\ell\}$ linearmente indipendenti [1]; verificate in questo modo che vale il teorema di struttura.

Soluzione esercizio 2. Applicando Gauss a

$$A = \left|\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right|$$

otteniamo

$$\left|\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 1/2 & 2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

Sia S la matrice 4×5 a sinistra (la stessa dell'esercizio precedente); sia

$$\underline{c} = (1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)\,.$$

Allora, dalla teoria, $S\underline{x} = \underline{c}$ è un sistema compatibile. Per quanto visto a lezione sappiamo che il nostro sistema non-omogeneo originale è equivalente al sistema $S\underline{x} = \underline{c}$; ne segue che il nostro sistema originale è compatibile e le sue soluzioni sono date dalle soluzioni di $S\underline{x} = \underline{c}$. Procedendo come nell'esercizio precedente, ma tenendo conto dei termini noti, otteniamo

$$\Sigma = \underline{v}_0 + \mathrm{Span}((-1, 3, -1, 4, 0), (0, 1, -1, 0, 1))$$

con

$$\underline{v}_0 = (\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0)\,.$$

Osservate che abbiamo verificato esplicitamente il Teorema di struttura: Σ è espresso come somma di una soluzione particolare del sistema, $\underline{v}_0$, e di tutte le soluzioni del sistema *omogeneo* associato.

Esercizio 3. Sia $A \in M_{34}(\mathbb{R})$ la matrice data da

$$A = \left|\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -3 & -4 \end{array}\right|$$

e sia $L_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare ad essa associata.
Scrivere l'espressione di L_A:

$$L_A \left|\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} \dots \\ \dots \\ \dots \end{array}\right|$$

Determinare una base per $\mathrm{Ker}(L_A)$.
Determinare la dimensione di $\mathrm{Im}(L_A)$.

---

[1] *Suggerimento*: utilizzare l'esercizio precedente ....

Determinare una base per $\mathrm{Im}(L_A)$.
Studiare iniettività e suriettività di L_A.
Soluzione esercizio 3. Procediamo come sopra ma un pó rapidamente. Sappiamo che

$$\mathrm{Ker}(L_A) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid L_A(\underline{x}) = \underline{0}\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\underline{x} = \underline{0}\}\,;$$

basta allora risolvere il sistema omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$ trovandone una base. Riducendo con Gauss e risolvendo il sistema otteniamo che

$$\mathrm{Ker}(L_A) = \mathrm{Span}\left(\left| \begin{array}{c} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{c} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right| \right).$$

Dato che il nucleo è non banale, ne segue che L_A non è iniettiva.
La dimensione dell'Immagine è 4-2=2. Dato che $\mathrm{Im}L_A$ non è tutto $\mathbb{R}^3$, essendo di dimensione 2, ne segue che L_A non è suriettiva.
Abbiamo visto che $\mathrm{Im}L_A$ è il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dalle colonne di A; la riduzione di Gauss ci dice che i primi due vettori colonna di A sono una base per lo spazio generato dalle colonne di A, cioè per l'immagine di L_A.
Esercizio 4. Stabilire se i seguenti sottoinsiemi $W \subset V$ sono sottospazi. Giustificare le risposte.

(1) $V = \mathbb{R}^3$, $W := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1x_2x_3 = 0\}$
(2) $V = \mathbb{R}[t]$, $W := \{p \in \mathbb{R}[t] \mid \text{ grado di } p = n\}$
(3) $V = \mathbb{R}^4$, $W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$
(4) $V = \mathbb{R}^4$, $W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1\}$
(5) $V = \mathbb{R}^4$, $W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2 - x_3 + x_4^2 = 0\}$
(6) $V = \mathbb{R}^4$, $W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2 - x_3 + x_4^2 = 1\}$
(7) $V = \mathbb{R}^4$, $W = \{(x_1, 0, x_2, x_3), x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$
(8) $V = \mathbb{R}^4$, $W = \{(x_1, 7, x_2, x_3), x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$

Soluzione esercizio 4.
(1) non è un sottospazio perché non è chiuso rispetto alla somma:
$(1,0,1) \in W, (0,1,0) \in W$ ma $(1,0,1) + (0,1,0) = (1,1,1) \notin W$.
(2) non è un sottospazio perché non contiene il vettore nullo di V.
(3) è un sottospazio perché è soluzione di un sistema lineare omogeneo di una equazione in 4 incognite.
(4) non è un sottospazio perché non contiene il vettore nullo di V.
(5) non è un sottospazio perché, ad esempio, $(1,-1,1,1) \in W$ ma $2(1,-1,1,1) = (2,-2,2,2) \notin W$.
(6) non è un sottospazio perché non contiene il vettore nullo di V.
(7) è un sottospazio perché è soluzione di un sistema lineare omogeneo di una equazione in 4 incognite, l'equazione che impone che la seconda coordinata sia uguale a zero.
(8) non è un sottospazio perché non contiene il vettore nullo di V.