Corso di Laurea in Informatica
Algebra. a.a. 2023-24. Canale 1.
Compito a casa del 7/12/2023

Esercizio 1. Utilizzando quanto visto ultimamente a lezione, determinare una base per il sottospazio di $\mathbb{R}^5$:

$$W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 - x_3 + x_4 + x_5 = 0\}$$

Soluzione esercizio 1. Notiamo innanzitutto che $W = \mathrm{Ker}A$ con $A \in M_{1,5}(\mathbb{R})$, $A = |1\ 0\ -1\ 1\ 1\ |$. Dato che A ha ovviamente rango uguale ad 1, ne segue che W ha dimensione $5 - \mathrm{rg}A = 4$. Per determinare una base di W risolviamo il sistema omogoneo di 1 equazione in 5 incognite che definisce W:
scriviamo quindi $W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^5 \mid \mathbf{x_1} = x_3 - x_4 - x_5\}$. Variabile dipendente: x_1. Variabili libere x_2, x_3, x_4, x_5. Quindi

$$W = \left\{ \begin{vmatrix} x_3 - x_4 - x_5 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{vmatrix}, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\}$$

Ne segue, ragionando come al solito, che

$$W = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right)$$

Dato che W ha dimensione 4 ne segue che necessariamente i quattro vettori dati sono una base di W.

Esercizio 2. Siano $U, V \subset \mathbb{R}^4$ i sottospazi di $\mathbb{R}^4$ dati da

$$U = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix} \right), \quad V = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ -3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix} \right).$$

Determinare basi di U e di V. Determinare una base per $U+V$. (È ovvio che $U+V$ ha come insieme di generatori i vettori ottenuti prendendo l'unione di generatori di U ed di generatori di V.)
Stabilire se $\mathbb{R}^4$ è somma diretta di U e V, cioè se $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$.

Soluzione esercizio 2. Determiniamo innanzitutto basi per questi due sottospazi, utilizzando la riduzione a scala. Scopriamo che

$$U = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right), \quad V = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ -3 \end{vmatrix} \right).$$

È chiaro che queste due coppie di vettori sono basi rispettivamente per U e V. Consideriamo i $4 = 2 + 2$ vettori ottenuti prendendo l'unione delle due basi. Vogliamo estrarre una base (sicuramente sono un insieme di generatori per $U + V$). Di fatto essi sono sono linearmente indipendenti e quindi una base di $U+V$; per verificare questa affermazione basta mettere i 4 vettori in colonna e ridurre con Gauss. Scopriamo che il rango della relativa matrice 4×4 è proprio 4 (ci sono 4 pivot); ne segue che i 2+2=4 vettori sono linearmente indipendenti e quindi, necessariamente, una base di $U+V$ come volevasi. Per rispondere alla domanda sulla somma diretta. Vi ricordo che dobbiamo verificare se accade che $U+V=\mathbb{R}^4$ e $U\cap V=\underline{0}$. Già sappiamo che $U+V=\mathbb{R}^4$ ma allora applicando la formula di Grassmann scopriamo che si deve avere $\dim U\cap V=0$, dato che $\dim U\cap V=\dim U+\dim V-\dim(U+V)=2+2-4$. Conclusione: $\mathbb{R}^4=U\oplus V$.

Equazioni cartesiane e parametriche di sottospazi

Sia U un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ o più in generale di $\mathbb{K}^n$. Supponiamo che U abbia **dimensione** ℓ.
Diremo che sono date **equazioni cartesiane** per U se è data una matrice $A\in M_{(n-\ell)\times n}(\mathbb{K})$ **di rango uguale a** $n-\ell$, e cioè di **rango massimo**, tale che

$$U=\{\underline{x}\,|\,A\underline{x}=\underline{0}\}\ .$$

Le equazioni cartesiane sono precisamente questo sistema di equazioni che hanno U come insieme soluzione. Non sono univocamente determinate. Notiamo che $(n-\ell)$ è il **numero minimo** di equazioni necessarie per descrivere U tramite un sistema in n incognite: infatti, se A è una matrice $(n-\ell)\times n$ di rango massimo, e cioè di rango $(n-\ell)$, allora per il teorema della dimensione, si ha:

$$\dim \mathrm{Ker}A=\dim\mathbb{R}^n-\mathrm{rg}(A)=n-(n-\ell)=\ell.$$

Diremo che sono date **equazioni parametriche** per U se è data una base di U, $\{\underline{u}_1,\dots,\underline{u}_\ell\}$, con la quale sia possibile esprimere ogni vettore di U come

$$t_1\underline{u}_1+t_2\underline{u}_2+\cdots+t_\ell\underline{u}_\ell$$

per opportuni $t_1,\dots,t_\ell\in\mathbb{K}$. Le equazioni parametriche di U sono allora

$$\underline{x}=t_1\underline{u}_1+t_2\underline{u}_2+\cdots+t_\ell\underline{u}_\ell\,,\quad t_1,\dots,t_\ell\in\mathbb{K}\,.$$

Osserviamo che i sottospazi sono spesso dati come soluzioni di un sistema omogeneo (non necessariamente costituito da un numero minimo di equazioni (e cioè non necessariamente di rango massimo)) oppure tramite un sistema di generatori (non necessariamente una base del sottospazio). Per determinare equazioni cartesiane occorre nel primo caso ridurre il sistema ad un sistema di rango massimo, ad esempio operando una riduzione a scala oppure, nel secondo caso, estrarre una base dall'insieme dei generatori di U.

Si passa da equazioni cartesiane ed equazioni parametriche determinando una base per $\mathrm{Ker}A$.
Si passa da equazioni parametriche (e quindi il dato di una base per U) ad equazioni cartesiane, nel modo visto a lezione e spiegato a pagina 119 del libro, a partire dalla riga -8, con esempio chiarificatore a pagina 120 (Esempio 6.11).

Esercizio 3. Leggere le 8 ultime righe a pagina 119 e l'esempio 6.11.

Esercizio 4. Sia $U = \{\underline{x} \,|\, A\underline{x} = \underline{0}\}$, quindi $U = \mathrm{Ker}A$, con $A \in M_{34}(\mathbb{R})$ la matrice data da

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -3 & -4 \end{vmatrix}$$

Determinare equazioni cartesiane per U.
Determinare equazioni parametriche per U.

Soluzione esercizio 4. Il rango di A è uguale a 2, come subito si verifica riducendo a scala A. Ne segue dal teorema della dimensione che $U = \mathrm{Ker}A$ ha dimensione 4-2=2. Quindi cerchiamo una matrice $B \in M_{(4-2)\times 4}(\mathbb{R}) \equiv M_{2\times 4}(\mathbb{R})$, di rango 2, tale che $U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \,|\, B\underline{x} = \underline{0}\}$; ma A ha rango 2; quindi 2 è il massimo numero di righe linearmente indipendenti. È anche ovvio che le prime due righe sono linearmente indipendenti, perché non-proporzionali. Ne segue che equazioni cartesiane per U sono date

$$B\underline{x} = \underline{0}\,, \quad \text{con} \quad B = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

B è quindi costituita dalle prime 2 righe di A; quindi "scartiamo" da A le righe "in eccesso" e teniamo solo quelle linearmente indipendenti ed in numero massimo con questa proprietà.
Per le equazioni parametriche, dobbiamo determinare una base per $U \equiv \mathrm{Ker}A$. Procedendo con la riduzione a scala, variabili libere e variabili dipendenti, etc etc vediamo che

$$U := \mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right)$$

con lo span costituito da vettori linearmente indipendenti. Ne segue che equazioni parametriche per U sono date da

$$\underline{x} = t_1 \begin{vmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} + t_2 \begin{vmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 5. Sia $U \leq \mathbb{R}^4$ come nell'esercizio 2,

$$U = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix} \right).$$

Determinare equazioni cartesiane per U.
Soluzione. Prima di tutto determiniamo una base per U; questo lo abbiamo già fatto

$$U = \mathrm{Span}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \right).$$

Ora, si veda pagina 119 del libro di testo, consideriamo

$$\left|\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}\right| \left|\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}\right|$$

riduciamo con Gauss ed imponiamo la compatibilità. Per la riduzione a scala: il primo passo è

$$A_2 \to A_2 - A_1 \ ; \quad A_3 \to A_3 - A_1 \ ; \quad A_4 \to A_4 - A_1$$

che ci dà

$$\left|\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right| \left|\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_1 \\ x_4 - x_1 \end{array}\right|$$

e poi il secondo passo:

$$A_4 \to A_4 - A_2$$

che ci dà

$$\left|\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right| \left|\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_1 \\ x_4 - x_1 - x_2 + x_1 \end{array}\right|$$

Imponendo la compatibilità otteniamo

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = 0 \\ -x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Queste sono le equazioni cartesiane di U. Scritto diversamente

$$U = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid B\underline{x} = \underline{0}\} \quad \text{con} \quad B = \left|\begin{array}{cccc} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right| .$$