Corso di Laurea in Informatica
Algebra. a.a. 2023-24. Canale 1.
Compito a casa del 7/12/2023

Esercizio 1. Utilizzando quanto visto ultimamente a lezione, determinare una base per il sottospazio di $\mathbb{R}^5$:

$$W = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 - x_3 + x_4 + x_5 = 0\}$$

Esercizio 2. Siano $U, V \subset \mathbb{R}^4$ i sottospazi di $\mathbb{R}^4$ dati da

$$U = \mathrm{Span}\left(\left|\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right| \left|\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right| \left|\begin{array}{c} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{array}\right|\right), \quad V = \mathrm{Span}\left(\left|\begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{array}\right| \left|\begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ -2 \\ -3 \end{array}\right| \left|\begin{array}{c} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{array}\right|\right).$$

Determinare basi di U e di V. Determinare una base per $U+V$. (È ovvio che $U+V$ ha come insieme di generatori i vettori ottenuti prendendo l'unione di generatori di U ed di generatori di V.)
Stabilire se $\mathbb{R}^4$ è somma diretta di U e V, cioè se $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$.

Equazioni cartesiane e parametriche di sottospazi

Sia U un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ o più in generale di $\mathbb{K}^n$. Supponiamo che U abbia **dimensione** ℓ.
Diremo che sono date **equazioni cartesiane** per U se è data una matrice $A \in M_{(n-\ell)\times n}(\mathbb{K})$ **di rango uguale a** $n-\ell$, e cioè di **rango massimo**, tale che

$$U = \{\underline{x} \,|\, A\underline{x} = \underline{0}\}\ .$$

Le equazioni cartesiane sono precisamente questo sistema di equazioni che hanno U come insieme soluzione. Non sono univocamente determinate. Notiamo che $(n-\ell)$ è il **numero minimo** di equazioni necessarie per descrivere U tramite un sistema in n incognite: infatti, se A è una matrice $(n-\ell)\times n$ di rango massimo, e cioè di rango $(n-\ell)$, allora per il teorema della dimensione, si ha:

$$\dim \mathrm{Ker} A = \dim \mathbb{R}^n - \mathrm{rg}(A) = n - (n-\ell) = \ell.$$

Diremo che sono date **equazioni parametriche** per U se è data una base di U, $\{\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_\ell\}$, con la quale sia possibile esprimere ogni vettore di U come

$$t_1\underline{u}_1 + t_2\underline{u}_2 + \cdots + t_\ell \underline{u}_\ell$$

per opportuni $t_1, \ldots, t_\ell \in \mathbb{K}$. Le equazioni parametriche di U sono allora

$$\underline{x} = t_1\underline{u}_1 + t_2\underline{u}_2 + \cdots + t_\ell \underline{u}_\ell\,, \quad t_1, \ldots, t_\ell \in \mathbb{K}\,.$$

Osserviamo che i sottospazi sono spesso dati come soluzioni di un sistema omogeneo (non necessariamente costituito da un numero minimo di equazioni (e cioè non necessariamente di rango massimo)) oppure tramite un sistema di generatori (non necessariamente una base del sottospazio). Per determinare equazioni cartesiane occorre nel primo caso ridurre il sistema ad un sistema di rango massimo, ad esempio operando una riduzione a scala oppure, nel secondo caso, estrarre una base dall'insieme dei generatori di U.

Si passa da equazioni cartesiane ed equazioni parametriche determinando una base per $\mathrm{Ker}A$.
Si passa da equazioni parametriche (e quindi il dato di una base per U) ad equazioni cartesiane, nel modo visto a lezione e spiegato a pagina 119 del libro, a partire dalla riga -8, con esempio chiarificatore a pagina 120 (Esempio 6.11).

Esercizio 3. Leggere le 8 ultime righe a pagina 119 e l'esempio 6.11.

Esercizio 4. Sia $U = \{\underline{x} \,|\, A\underline{x} = \underline{0}\}$, quindi $U = \mathrm{Ker}A$, con $A \in M_{34}(\mathbb{R})$ la matrice data da

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -3 & -4 \end{vmatrix}$$

Determinare equazioni cartesiane per U.
Determinare equazioni parametriche per U.

Esercizio 5. Sia $U \leq \mathbb{R}^4$ come nell'esercizio 2,

$$U = \operatorname{Span}\left(\left| \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{matrix} \right| \right).$$

Determinare equazioni cartesiane per U.