Corso di Laurea in Informatica
Algebra. a.a. 2023-24. Canale 1.
Compito in classe del 20/12/2023. Soluzioni.

Esercizio 1. *Sia* $V = \mathbb{R}^3$ *con base canonica fissata. Consideriamo l'applicazione lineare* $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definita dalla matrice:*

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} .$$

1.1. *Determinare gli autovalori di* L_A *e calcolarne la molteplicità algebrica.*

Soluzione 1.1. Abbiamo visto che gli autovalori di L_A sono le radici del polinomio caratteristico $P_{L_A}(\lambda)$. La matrice associata a L_A nella base canonica è proprio A e quindi $P_{L_A}(\lambda) = P_A(\lambda)$ con

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3).$$

Calcolando il determinante otteniamo: $P_A(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda - 1)(\lambda + 1)$ che ha ovviamente radici $\lambda_1 = 1$ *con molteplicità algebrica 2* e $\lambda_2 = -1$ con *con molteplicità algebrica 1* .

1.2. *Determinare equazioni cartesiane per gli autospazi associati. Calcolare la molteplicità geometrica di ogni autovalore.*

Soluzione 1.2. Vi ricordo che l'autospazio V_λ associato ad un autovalore λ è dato da

$$V_\lambda = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,;\, L_A\underline{x} = \lambda\underline{x}\} \equiv \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,;\, A\underline{x} = \lambda\underline{x}\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,;\, (A - \lambda \mathrm{I}_3)\underline{x} = \underline{0}\} .$$

Quindi $V_\lambda = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_3)$. Si ha allora, prendendo $\lambda = 1$ e poi $\lambda = -1$, con facili calcoli

$$V_1 = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,;\, x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$$

e

$$V_{-1} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \,;\, \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \}$$

Quindi, se denotiamo $m_g(\lambda_0)$ la molteplicità geometrica di un autovalore λ_0, e cioè la dimensione dell'autospazio associato, abbiamo

$$m_g(1) = 2 \quad m_g(-1) = 1 .$$

1.2bis. *Spiegare perché l'operatore* L_A *è diagonalizzabile.*

Soluzione 1.2bis. L_A ha tutti gli autovalori in $\mathbb{R}$ e per ognuno di essi $m_a = m_g$. Ne segue, per il criterio visto in classe, che L_A è diagonalizzabile.

1.3. *Per ogni autospazio determinare una base.*

Soluzione 1.3. Procedendo a risolvere i sistemi che definiscono V_1 e V_{-1} otteniamo

$$V_1 = \mathrm{Span}(\underline{v}_1 = (1, 0, -1), \underline{v}_2 = (2, -1, 0)) , \quad V_{-1} = \mathbb{R}(1, 0, 1) \equiv \mathbb{R}\underline{v}_3 .$$

Questi 3 vettori sono una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori per L_A. Infatti i primi due sono due vettori non-proporzionali in un piano ed il terzo è un vettore non-nullo di una retta non contenuta nel piano.
Notate che possiamo scegliere una qualsiasi coppia di vettori non proporzionali del

piano V_1 ed un qualsiasi generatore della retta V_{-1} per avere basi per i due autospazi.

1.4. *Verificare che esiste una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori per L_A. Determinare esplicitamente una tale base. Questa base è unica ?*

Soluzione 1.4. I due vettori del piano V_1, $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$, insieme ad un generatore di V_{-1}, ad esempio $\underline{v}_3$, sono una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori. Tale base non è unica come spiegato nel punto precedente.

1.5. *Scrivere la matrice associata a L_A nella base di cui in 1.4.* (Utilizzate la definizione di matrice associata ad L_A in una base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$; vi ricordo che questa è la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $L_A(\underline{v}_j)$ nella base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$.) o caso, per la base

Soluzione 1.5. Come spiegato in dettaglio a lezione la matrice associata ad L_A in una base di autovettori è proprio la matrice diagonale che ha sulla diagonale gli autovalori di L_A (nell'ordine dato dall'ordine degli autovettori). In questo caso la matrice associata a L_A nella base di autovettori è la matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

1.6 *Determinare una matrice invertibile M tale che $M^{-1}\,A\,M$ sia diagonale.*

Soluzione 1.6. Abbiamo a questo punto due basi di $\mathbb{R}^3$; la base canonica e la base di autovettori $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$. Sia M la matrice che ha come j-ma colonna le coordinate di $\underline{v}_j$ nella base canonica: questa è la matrice del cambiamento di base, dalla base canonica $\mathcal{E}$ alla base di autovettori $\mathcal{B}$, denotata $M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\mathrm{Id})$. Essa è quindi la matrice

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Sappiamo che la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(L_A)$ associata a L_A nella nuova base è data da

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(L_A) &= M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(\mathrm{Id}) \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(L_A) \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}) \\ &= (M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}))^{-1} \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(L_A) \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}) \\ &= (M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}))^{-1} \cdot A \cdot M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}) \end{aligned}$$

D'altra parte abbiamo già calcolato la matrice $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(L_A)$ utilizzando l'informazione che la base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ è una base di autovettori ed abbiamo trovato

$$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(L_A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

In definitiva, la matrice $M := M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\mathrm{Id})$ è tale che

$$M^{-1}AM = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

come si voleva.

1.7 *La matrice di cui in 1.6 è unica ?.*

Soluzione 1.7. La matrice M è uguale a $M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(\mathrm{Id})$ e dipende quindi dalla base di autovettori che abbiamo fissato; scegliendo una base diversa di autovettori cambiamo M ma è ancora vero, applicando il ragionamento fatto sopra, che

$$M^{-1}AM = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right|.$$

Quindi M **non** è unica.

Esercizio 2. *Consideriamo l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ definita dalla matrice*

$$A = \left|\begin{array}{ccc} i & 2 & 1 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & i \end{array}\right|.$$

2.1. *Verificare che L_A ha un unico autovalore e determinarne la molteplicità algebrica.*
2.2. *Determinare equazioni cartesiane per l' autospazio associato a tale autovalore; determinare la molteplicità geometrica di tale autovalore.*
2.3. *Stabilire se L_A è diagonalizzabile.*

Soluzione esercizio 2. Sia $T := L_A$. Si ha $P_T(\lambda) = (i-\lambda)^3$ e quindi T ha un solo autovalore, $\lambda = i$, con molteplicità algebrica uguale a 3. L'autospazio associato a questo autovalore è $\mathrm{Ker}\,(T - iI_3)$ e cioè

$$\mathrm{Ker}\left(\left|\begin{array}{ccc} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right|\right).$$

Questo autospazio ha equazioni cartesiane

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

e quindi $\mathrm{Ker}\,(T - iI_3) = \mathbb{R}(1, 0, 0)$. Ne segue che la molteplicità geometrica di $\lambda = i$ è uguale ad 1. Ne segue che T non è diagonalizzabile.