Corso di Laurea in Informatica
Algebra. a.a. 2023-24. Canale 1.
Compito in classe del 20/12/2023

Esercizio 1. *Sia* $V = \mathbb{R}^3$ *con base canonica fissata. Consideriamo l'applicazione lineare* $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definita dalla matrice:*

$$A = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} .$$

1.1. *Determinare gli autovalori di* L_A *e calcolarne la molteplicità algebrica.*

1.2. *Determinare equazioni cartesiane per gli autospazi associati. Calcolare la molteplicità geometrica di ogni autovalore.*

1.2bis. *Spiegare perché l'operatore* L_A *è diagonalizzabile.*

1.3. *Per ogni autospazio determinare una base.*

1.4. *Determinare esplicitamente una base di* $\mathbb{R}^3$ *costituita da autovettori per* L_A. *Questa base è unica ?*

1.5. *Scrivere la matrice associata a* L_A *nella base di cui in 1.4. (Utilizzate la definizione di matrice associata ad* L_A *in una base* $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$*; vi ricordo che questa è la matrice che ha come* j*-ma colonna le coordinate di* $L_A(\underline{v}_j)$ *nella base* $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$*.)*

1.6 *Determinare una matrice invertibile* M *tale che* $M^{-1} A M$ *sia diagonale.*

1.7 *La matrice di cui in 1.6 è unica ?.*

Esercizio 2. *Consideriamo l'applicazione lineare* $L_A : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ *definita dalla matrice*

$$A = \begin{vmatrix} i & 2 & 1 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & i \end{vmatrix} .$$

2.1. *Verificare che* L_A *ha un unico autovalore e determinarne la molteplicità algebrica.*
2.2. *Determinare la molteplicità geometrica di tale autovalore.*
2.3. *Stabilire se* L_A *è diagonalizzabile.*